НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Нахапетян Б.С., Хачатрян Л.А.

Вероятностные методы в дискретных задачах

Ереван
Издательство «Гитутюн» НАН РА
2016

УДК 519
ББК 22.176
Н 349

**Печатается по решению Научно–издательского совета
Национальной академии наук Республики Армения**

Нахапетян Б.С., Хачатрян Л.А.
Вероятностные методы в дискретных задачах — Ер.: Гитутюн, 2016, 395с.

Монография посвящена вопросам применения вероятностных методов в различных разделах математики. Среди них теория графов и комбинаторика, шенноновская теория информации, теория мартингалов на многомерных структурах, а также математическая статистическая физика.

Для научных сотрудников, а также студентов старших курсов и аспирантов в областях теории вероятностей, математической физики и дискретной математики.

УДК 519
ББК 22.176

ISBN 978–5–8080–1243–1

Оглавление

Предисловие

Настоящая книга, содержащая семь глав, представляет собой собрание достаточно объемных эссе, каждое из которых посвящено определенному разделу математики. При выборе разделов, помимо авторских предпочтений, существенными факторами являлись их статистическая направленность и прикладная значимость. Не последнюю роль играло и вполне понятное желание авторов (как вероятностников) на небольшом количестве примеров из громадного ареала приложений вероятностно-статистических методов показать их силу и широчайшие возможности. При этом мы старались излагать содержание книги так, чтобы оно было интересно, по-возможности, большей аудитории.

Первая глава содержит предварительные сведения, причем представленного материала вполне достаточно, чтобы рассматривать ее как некоторое введение в дискретную теорию вероятностей.

Вторая глава посвящена применению вероятностного метода (в духе П. Эрдёша) в задачах теории графов, комбинаторики и экстремальной теории множеств. Не обойдена вниманием и теория Рамсея. С использованием вероятностного метода в главе доказывается довольно широкий спектр различных детерминированных утверждений. Главным образом это теоремы существования, однако приводятся также, полученные из вероятностных соображений, детерминированные алгоритмы нахождения объектов, существование которых уже установлено (метод условных вероятностей).

В третьей главе излагается шенноновская теория информации (математическая теория связи). Вводится понятие энтропии ансамбля сообщений, изучаются ее свойства. Доказываются теоремы кодирования для источников информации, при этом рассматриваются как равномерные, так и неравномерные способы кодирования. Для дискретных каналов без памяти приводится доказательство основной теоремы Шеннона об оптимальной передаче сообщений по каналам связи с шумами. Дается оценка скорости стремления к нулю (при увеличении длины кодового слова) вероятности ошибки декодирования. Завершается глава описанием кодов Хемминга, исправляющих ошибки.

В последующих трех главах, наряду с известными результатами, приводятся и оригинальные результаты авторов.

Тема четвертой главы — теория случайных полей. Данная дисциплина развивалась параллельно с развитием математической статистической физики и стимулировалась ее задачами. В ее основе лежит теория Р. Добрушина описания случайного поля посредством спецификации — совокупности вероятностных распределений на конечных множествах с бесконечными граничными условиями. Наряду с добрушинским описанием рассматриваются также описания случайных полей посредством одноточечных спецификаций, а также системами конечномерных распределений с конечными граничными условиями. Вводится понятие случайного поля со слабо зависимыми компонентами, и для таких полей приводятся классические предельные теоремы теории вероятностей (центральная и локальная предельные теоремы, закон повторного логарифма). В заключительной части главы излагается разрабатываемая одним из авторов (совместно с С. Дашяном) общая теория гиббсовских случайных полей, в построении которой не используется (физическое) понятие потенциала.

В пятой главе рассматриваются мартингалы на многомерных структурах. Одним из базовых понятий при построении таких мартингалов является понятие мартингал–разностного случайного поля. Эти поля характеризуются тем, что суммы их компонент, взятые по конечным подмножествам многомерной структуры, образуют мартингал. Последнее открывает возможность устанавливать для мартингал–разностных случайных полей основные предельные теоремы для сумм случайных слагаемых. Также приводятся различные подходы к описанию мартингал–разностных случайных полей, в частности, подход, основанный на принципе рандомизации. Полученные результаты применяются к гиббсовским случайным полям, для которых устанавливаются предельные теоремы нового типа с нестандартными условиями.

Шестая глава посвящена вопросам математической статистической физики. Эта современная теория ставит своей целью изложить стержневые факты статистической физики на строгой математической основе. Центральным здесь является понятие гиббсовского случайного поля с заданным потенциалом, введенное Добрушиным. Многие из результатов теории устанавливаются как следствия общих теорем для случайных полей, примененных к гиббсовским спецификациям. Приводятся условия на потенциал, при которых отвечающее ему гиббсовское поле существует, а также условия, при которых оно единственно. Важно, что неединственность гиббосвского поля можно трактовать как наличие в рассматриваемой модели фазового перехода. Данный факт иллюстрируется на примере модели Изинга. Также доказывается установленный Добрушиным и одним из авторов факт сильной выпуклости давления, что с вероятностной точки зрения отвечает линейному росту дисперсии потенциальной энергии как функции объема. Последнее играет важную роль при доказательстве предельных теорем для гиббсовских случайных полей с заданным потенциалом, которые также нашли свое место в настоящей главе. В конце главы излагается новый подход к обоснованию формулы Гиббса, предложенный одним из авторов (совместно с С. Дашяном).

Седьмая глава носит информативный характер. Здесь, в отличие от предыдущих глав, рассматриваются непрерывные вероятностные модели, математическому описанию которых посвящена вводная часть главы. На основе анализа известной задачи Бюффона об игле показывается как зарождалась идея одного из самых мощных методов вычислительной математики — метода Монте–Карло. При применении этого метода существенным является использование датчиков случайных чисел, возможные типы которых обсуждаются в главе. Обобщение задачи Бюффона на случай бросания нескольких игл явилось предтечей и другой математической дисциплины — стохастической геометрии. Важным стимулирующим фактором ее развития явились задачи Крофотона и Бюффона–Сильвестра. Далее приводятся также некоторые факты из теории случайных процессов с непрерывным временем. Рассматриваются винеровский процесс, пуассоновский и гиббсовский точечные процессы. Изложение материала завершается примерами применения вероятностного метода в задачах финансовой математики.

В конце каждой главы приводятся библиография с небольшими комментариями и список литературы, включающий работы, непосредственно связанные с текстом.

Мы благодарны нашим коллегам Р. Амбарцумяну, В. Арзуманяну, А. Далаляну, В. Оганяну и А. Сукиасяну, которые, ознакомившись с некоторыми главами книги, сделали много полезных замечаний.