ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1996 Естественные науки

Математика

УДК 517. 55

А.И. ПЕТРОСЯН

ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПОЛИДИСКЕ

В работе получено интегральное представление типа Коши-Грина для функций, гладких в замыкании полидиска D^n. Это представление имеет вид

$$u(z)=P_{\rho,\alpha,\gamma}(u)(z)+T_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial}u)(z),$$

где $P_{\rho,\alpha,\gamma}$ является оператором ортогонального проектирования в пространстве $L^2\left(D^n,\prod_{k=1}^{n}\left(1-|\zeta_k|^{\rho_k}\right)^{\alpha_k}|\zeta_k|^{\gamma_k}\,\mathrm{d}v_{2n}\right)$ на подпространство аналитических функций.

Пусть D - единичный круг на комплексной плоскости, $C^1(\overline{D})$ - множество функций, непрерывных на $\overline{D}$ вместе со своими производными первого порядка. Известная формула Коши-Грина

$$u(z)=\mathrm{P}(u)(z)+\mathrm{T}(\bar{\partial}u)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{u(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}v_2(\zeta)}{\zeta-z}, \tag{1}$$

где $u\in C^1(\overline{D})$, $\mathrm{d}v_2$ - элемент площади, позволяет выделить из функции $u(z)$ ее "аналитическую часть" $\mathrm{P}(u)(z)$. Это свойство формулы (1) используется в различных вопросах, например, для написания в явном виде решения неоднородного уравнения Коши-Римана

$$\frac{\partial u(z)}{\partial\bar{z}}=f(z),$$

где $f(z)$ - функция, непрерывная на $\overline{D}$. А именно одним из решений этого уравнения является функция $\mathrm{T}(f)(z)$. Уже одно это применение свидетельствует о важности формул типа (1), особенно в многомерном случае.

Выбирая соответствующим образом весовые сомножители к функции $u(z)$, из (1) можно получить различные весовые формулы. Например, применяя (1) к функции

$$u_z(\zeta)=\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{\alpha+1}u(\zeta)$$

($\alpha>-1$, $z\in D$ фиксировано) и учитывая, что $u_z(z)=u(z)$, $u_z(\zeta)=O$ при $|\zeta|=1$, получим

$$u(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\iint_D u(\zeta)\frac{\left(1-|\zeta|^2\right)^{\alpha}}{\left(1-\bar{\zeta}z\right)^{\alpha+2}}\mathrm{dv}_2(z)-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{\alpha+1}\frac{\mathrm{dv}_2(\zeta)}{\zeta-z}. \qquad (2)$$

В случае голоморфной функции $u(z)$ имеем $\dfrac{\partial u}{\partial\bar{z}}=0$, и в (2) второе слагаемое исчезает; для этого случая формула впервые получена (другим способом) в [1]. В дальнейшем в работе [2] были введены ядра более общего типа и получены соответствующие интегральные представления, а именно доказана следующая теорема:

Теорема A (см. [2]). Пусть даны числа $\rho>O$, $\alpha>-1$, $\gamma>-2$, $\mu=\dfrac{2+\gamma}{\rho}$.

Тогда для всякой $u\in C^1\left(\overline{D}\right)$ имеет место интегральная формула

$$u(z)=\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}(u)(z)+\mathrm{T}_{\rho,\alpha,\gamma}\left(\bar{\partial}u\right)(z)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\iint_D\left(1-|\zeta|^{\rho}\right)^{\alpha}|\zeta|^{\gamma}u(\zeta)\Phi(z,\zeta)\mathrm{dv}_2(\zeta)-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\partial u(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\psi(z,\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{dv}_2(\zeta), \qquad (3)$$

где ядра Φ и ψ имеют вид

$$\Phi(z,\zeta)=\Phi(z,\zeta;\rho,\alpha,\gamma)=\frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)}\int_O^{\infty}e^{-t}E_{\rho/2}\left(t^{2/\rho}z\bar{\zeta};\mu\right)t^{\alpha+\mu}\mathrm{d}t,$$

$$\psi(z,\zeta)=\psi(z,\zeta;\rho,\alpha,\gamma)=1-\frac{(\zeta-z)\rho}{\zeta\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{|\zeta|}\left(1-r^{\rho}\right)^{\alpha}r^{\gamma+1}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha+\mu}E_{\rho/2}\left(t^{2/\rho}r^2z/\zeta;\mu\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}r,$$

$E_{\rho}(z;\mu)$ - функция типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho}(z;\mu)=\sum_{k=O}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k/\rho)}.$$

Отметим, что формула (2) является частным случаем (3), соответствующим выбору параметров $\rho=2$, $\gamma=O$. При этом

$$\Phi(z,\zeta;\ 2,\alpha,O)=(\alpha+1)\frac{1}{\left(1-\bar{\zeta}z\right)^{\alpha+2}};\quad \psi(z,\zeta;\ 2,\alpha,O)=\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^{\alpha+1}$$

Перечислим те свойства ядер Φ и ψ, на которых основывается доказательство теоремы A:

а) $\psi=1$ при $\zeta=z$;

б) $\psi=0$ при $|\zeta|=1$;

в) $\dfrac{\partial\psi}{\partial\bar{\zeta}}=\left(1-|\zeta|^{\rho}\right)^{\alpha}|\zeta|^{\gamma}(z-\zeta)\Phi$.

Пусть $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D)$ - пространство функций, у которых норма

$$\|f\|_{\rho,\alpha,\gamma}=\left\{\iint_D |f(\zeta)|^2\left(1-|\zeta|^\rho\right)^\alpha |\zeta|^\gamma \mathrm{dv}_2(\zeta)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

конечна. Снабженное скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_{\rho,\alpha,\gamma}=\iint_D f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\left(1-|\zeta|^\rho\right)^\alpha |\zeta|^\gamma \mathrm{dv}_2(\zeta),$$

это пространство является гильбертовым. Множество голоморфных функций из $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D)$ образует ее замкнутое подпространство и обозначается через $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D)$. Оказывается, что формула (3) обладает замечательным свойством: выделяемая ею "аналитическая часть" является ортогональной проекцией $u(z)$ в $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D)$ на $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D)$.

Настоящая работа посвящена распространению формулы (3) на многомерный случай, а именно на случай функций, заданных в полидиске. Отметим сразу, что приводимую ниже соответствующую многомерную формулу (4) не удается получить, исходя из одномерной формулы (3).

Приведем необходимые нам обозначения:

$D^n=\left\{z\in\mathbf{C}^n:|z_k|<1,\ k=1,\ldots,n\right\}$ - единичный полидиск в пространстве $\mathbf{C}^n$;

для гладкой функции $u(z)$ и $\mathrm{w}\in\mathbf{C}^n$ вводится обозначение

$$\left\langle\bar\partial u,\mathrm{w}\right\rangle_{(i_1,\ldots,i_k)}=\frac{\partial u}{\partial\bar z_{i_1}}\overline{\mathrm{w}}_{i_1}+\frac{\partial u}{\partial\bar z_{i_2}}\overline{\mathrm{w}}_{i_2}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial\bar z_{i_k}}\overline{\mathrm{w}}_{i_k};$$

дополнительный к $(i_1,\cdots,i_k)$ мультииндекс обозначается через $(j_1,\cdots,j_{n-k})$; далее, $d\bar z[k]=d\bar z_1\wedge\cdots\wedge d\bar z_{k-1}\wedge d\bar z_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\bar z_n$; $d\bar z\wedge dz=d\bar z_1\wedge\cdots\wedge d\bar z_n\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$, причем пространство $\mathbf{C}^n$ ориентировано так, что $d\bar z\wedge dz=(2i)^n\mathrm{dv}_{2n}$, где dv_{2n} означает $2n$ - мерную меру Лебега в $\mathbf{C}^n\approx\mathbf{R}^{2n}$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. Для всякой функции $u(z)$, гладкой на $\overline{D}^n$, и чисел

$$\rho_k>O,\ \alpha_k>-1,\ \ \gamma_k>-2,\ \mu_k=\frac{2+\gamma_k}{\rho_k},\ \ k=1,2,\cdots,n,$$

имеет место интегральное представление

$$u(z)=\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}(u)(z)+\mathrm{T}_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar\partial u)(z), \qquad (4)$$

где
$$\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}(u)(z)=\frac{1}{\pi^n}\int_{D^n}u(\zeta)\prod_{m=1}^n\left(1-|\zeta_m|^{\rho_m}\right)^{\alpha_m}|\zeta_m|^{\gamma_m}\Phi_m \mathrm{dv}_{2n}(\zeta),$$

$$\mathrm{T}_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar\partial u)(z)=\frac{1}{\pi^n}\sum_{k=O}^{n-1}(n-k-1)!\int_{D^n}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\left\langle\bar\partial u,z-\zeta\right\rangle_{(j_1,\cdots,j_{n-k})}\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_{n-k}}\times$$
$$\times\prod_{m=\alpha_1}^{\alpha_k}\left(1-|\zeta_m|^{\rho_m}\right)^{\alpha_m}|\zeta_m|^{\gamma_m}\Phi_m\frac{\mathrm{dv}_{2n}(\zeta)}{|\zeta-z|^{2n-2k}}.$$

Для краткости записи здесь положено

$$\rho=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n),\quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\quad \gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n),$$
$$\Phi_k=\Phi(z_k,\zeta_k;\rho_k,\alpha_k,\gamma_k),\qquad \psi_k=\psi(z_k,\zeta_k;\rho_k,\alpha_k,\gamma_k).$$

Предварительно докажем лемму, носящую сугубо технический характер.

Лемма. Пусть

$$\tilde{\Phi}_k=\left(1-|\zeta_k|^{\rho_k}\right)^{\alpha_k}|\zeta_k|^{\gamma_k}\Phi_k;$$

$$A_k=\sum_I\int_{D^n}u\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_{n-k}}\tilde{\Phi}_{i_1}\cdots\tilde{\Phi}_{i_k}\frac{|\zeta_{i_1}-z_{i_1}|^2+\cdots+|\zeta_{i_k}-z_{i_k}|^2}{|\zeta-z|^{2(n-k+1)}}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta,\quad 1\le k\le n;$$

$$B_k=\sum_I\int_{D^n}\left\langle\bar{\partial}u,z-\zeta\right\rangle_{(j_1,\cdots,j_{n-k})}\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_{n-k}}\tilde{\Phi}_{i_1}\cdots\tilde{\Phi}_{i_k}\frac{\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta}{|\zeta-z|^{2(n-k)}},\quad O\le k\le n-1,$$

где суммирование производится по всем упорядоченным мультииндексам

$$I=(i_1,i_2,\cdots,i_k),\quad 1\le i_1<\cdots<i_k\le n.$$

Тогда

$$A_k=\frac{1}{n-k}(B_k+A_{k+1}),\quad 1\le k\le n-1. \tag{5}$$

Доказательство. Используя тождество

$$\frac{|\zeta_{i_1}-z_{i_1}|^2+\cdots+|\zeta_{i_k}-z_{i_k}|^2}{|\zeta-z|^{2(n-k+1)}}=\frac{1}{n-k}\sum_{m=1}^{n-k}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_{j_m}}\frac{\bar{\zeta}_{j_m}-\bar{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2(n-k)}},$$

справедливость которого проверяется непосредственным вычислением, будем иметь

$$A_k=\frac{1}{n-k}\sum_I\sum_{m=1}^{n-k}\int_{D^n}u\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_{n-k}}\tilde{\Phi}_{i_1}\cdots\tilde{\Phi}_{i_k}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_{j_m}}\frac{\bar{\zeta}_{j_m}-\bar{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\mathrm{d}\bar{\zeta}\wedge\mathrm{d}\zeta=$$
$$=\frac{1}{n-k}\sum_I\sum_{m=1}^{n-k}(-1)^{j_m-1}\int_{D^n}u\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_{n-k}}\tilde{\Phi}_{i_1}\cdots\tilde{\Phi}_{i_k}\mathrm{d}\left[\frac{\bar{\zeta}_{j_m}-\bar{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\mathrm{d}\bar{\zeta}[j_m]\wedge\mathrm{d}\zeta\right].$$

Применяя к каждому слагаемому формулу Стокса, получим

$$A_k=\frac{1}{n-k}\sum_I\sum_{m=1}^{n-k}(-1)^{j_m-1}\left\{\int_{\partial D^n}u\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_{n-k}}\tilde{\Phi}_{i_1}\cdots\tilde{\Phi}_{i_k}\frac{\bar{\zeta}_{j_m}-\bar{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\mathrm{d}\bar{\zeta}[j_m]\wedge\mathrm{d}\zeta-\right.$$
$$\left.-\int_{D_n}\mathrm{d}\left[u\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_{n-k}}\tilde{\Phi}_{i_1}\cdots\tilde{\Phi}_{i_k}\right]\wedge\frac{\bar{\zeta}_{j_m}-\bar{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\mathrm{d}\bar{\zeta}[j_m]\wedge\mathrm{d}\zeta\right\}.$$

Интеграл по границе полидиска исчезает в силу свойства (б). Учитывая свойство (в), будем иметь

$$A_k = \frac{1}{n-k}\sum_I \int_{D^n}\left[\sum_{m=1}^{n-k}\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_{j_m}}\left(\bar z_{j_m}-\bar\zeta_{j_m}\right)\right]\psi_{j_1}\cdots\psi_{j_{n-k}}\tilde\Phi_{i_1}\cdots\tilde\Phi_{i_k}\frac{\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta}{|\zeta-z|^{2n-2k}}+$$

$$+\frac{1}{n-k}\sum_I\sum_{m=1}^{n-k}\int_{D^n} u\psi_{j_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\bar\zeta_{j_m}}\psi_{j_m}\cdots\psi_{j_{n-k}}\tilde\Phi_{i_1}\cdots\tilde\Phi_{i_k}\frac{\left|\zeta_{j_m}-z_{j_m}\right|^2}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta=$$

$$=\frac{1}{n-k}B_k+\frac{1}{n-k}\sum_I\sum_{m=1}^{n-k}\int_{D_n}u\psi_{j_1}\cdots\tilde\Phi_{j_m}\psi_{j_{n-k}}\tilde\Phi_{i_1}\cdots\tilde\Phi_{i_k}\frac{\left|\zeta_{j_{1m}}-z_{j_m}\right|^2}{|\zeta-z|^{2n-2k}}\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

Объединяя здесь слагаемые, имеющие одинаковый набор индексов $i_1,\cdots,i_k,j_m$ и обозначив упорядоченный мультииндекс через $(i_1,\cdots,i_{k+1})$, получим утверждение (5) леммы.

Доказательство теоремы. Нам нужна формула Мартинелли-Бохнера для гладких функций. Напомним ее (см. , например, [3]):

$$g(z)=c_n\int_{\partial G}g(\zeta)\omega'(\zeta,z)-c_n\int_G\bar\partial g(\zeta)\wedge\omega'(\zeta,z), \qquad (6)$$

где $g(z)$ - функция, гладкая на замыкании ограниченной области с кусочно-гладкой границей, $c_n=\dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$, $\omega'(\zeta,z)$ - форма бистепени $(n,n-1)$, имеющая следующий вид:

$$\omega'(\zeta,z)=\frac{1}{|\zeta-z|^{2n}}\left\{\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\left(\bar\zeta_k-\bar z_k\right)\mathrm{d}\bar\zeta[k]\right\}\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

Применив (6) к функции $g(\zeta)=u(\zeta)\psi_1\cdots\psi_n$, с учетом свойств (а) - (в) будем иметь

$$u(z)=c_n\int_{\partial D^n}u\psi_1\cdots\psi_n\omega'(\zeta,z)-c_n\int_{D^n}\bar\partial u\wedge\psi_1\cdots\psi_n\omega'(\zeta,z)-\int_{D^n}u\bar\partial_\zeta(\psi_1\cdots\psi_n)\wedge\omega'(\zeta,z)=$$

$$=-c_n\int_{D^n}\sum_{k=1}^n\frac{\partial u}{\partial\bar\zeta_k}\left(\bar\zeta_k-\bar z_k\right)\psi_1\cdots\psi_n\frac{\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta}{|\zeta-z|^{2n}}-c_n\int_{D^n}u\left[\sum_{i=1}^n\frac{\partial\psi_i}{\partial\bar\zeta_i}\psi_1\cdots\psi_{i-1}\psi_{i+1}\cdots\psi_n\mathrm{d}\bar\zeta_i\right]\wedge\omega'(\zeta,z)=$$

$$=c_n\int_{D^n}\left\langle\bar\partial u,z-\zeta\right\rangle_{(1,\cdots,n)}\psi_1\cdots\psi_n\frac{\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta}{|\zeta-z|^{2n}}+c_n\int_{D^n}u\sum_{i=1}^n\psi_1\cdots\psi_{i-1}\psi_{i+1}\cdots\psi_n\tilde\Phi\frac{|\zeta_i-z_i|^2}{|\zeta-z|^{2n}}\mathrm{d}\bar\zeta\wedge\mathrm{d}\zeta.$$

В обозначениях леммы это равенство выглядит следующим образом:

$$u(z)=c_n\left(B_0+A_1\right). \qquad (7)$$

Из леммы последовательно получаем

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{1}{n-1}B_1+\frac{1}{n-1}A_2=\frac{1}{n-1}B_1+\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n-2}B_2+\frac{1}{n-2}A_3\right)=\cdots=\\&=\frac{1}{n-1}B_1+\frac{1}{(n-1)(n-2)}B_2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}B_{n-1}+\frac{1}{(n-1)!}A_n.\end{aligned} \qquad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$u(z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left\{B_o+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n-1)\cdots(n-k)}B_k+\frac{1}{(n-1)!}A_n\right\}= \\ =\frac{1}{(2\pi i)^n}A_n+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{(2\pi i)^n}B_k. \tag{9}$$

Утверждение (4) теоремы I следует из (9), если заметить, что согласно определению A_k, B_k и $\tilde{\Phi}_k$ имеем

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}A_n=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{D^n}u\tilde{\Phi}_1\cdots\tilde{\Phi}_n\frac{|\zeta_1-z_1|^2+\cdots+|\zeta_n-z_n|^2}{|\zeta-z|^2}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\int_{D^n}u\tilde{\Phi}_1\cdots\tilde{\Phi}_n dv_{2n}=\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}(u)(z);$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{(2\pi i)^n}B_k=\mathrm{T}_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial}u)(z).$$

Как было отмечено выше, интегральное представление (4) является многомерным аналогом (3) и в частном случае формулы (2). Отметим, что другой многомерный вариант формулы (2) получен в работе(4).

Введем пространство $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ функций f, измеримых в D^n и имеющих конечную норму

$$\|f\|_{\rho,\alpha,\gamma}=\left\{\int_{D^n}|f(\zeta)|^2\prod_{k=1}^{n}\left(1-|\zeta_k|^{\rho_k}\right)^{\alpha_k}|\zeta_k|^{\gamma_k}dv_{2n}(\zeta)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Это норма соответствует скалярному прозведению

$$\langle f,g\rangle_{\rho,\alpha,\gamma}=\int_{D^n}f(\zeta)\overline{g(\zeta)}\prod_{k=1}^{n}\left(1-|\zeta_k|^{\rho_k}\right)^{\alpha_k}|\zeta_k|^{\gamma_k}dv_{2n}(\zeta).$$

Множество функций из $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, голоморфных в D^n, составляет замкнутое подпространство $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Оператор $\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}$ является ортогональным проектором из $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ на $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.

Доказательство. Прежде всего, если $u\in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, то $\bar{\partial}u=0$ и, как следует из (4),

$$u(z)=\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}(u)(z).$$

Пусть, далее, v принадлежит ортогональному дополнению к $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ в $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$. Имеем

$$\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathrm{v})(z)=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{D^n}\mathrm{v}(\zeta)\prod_{k=1}^{n}\left(1-|\zeta_k|^{\rho_k}\right)^{\alpha_k}|\zeta_k|^{\gamma_k}\,\Phi_k \mathrm{dv}_{2n}(\zeta)=\frac{1}{\pi^n}\left\langle \mathrm{v}(\zeta),\prod_{k=1}^{n}\overline{\Phi(\zeta_k,z_k)}\right\rangle_{\rho,\alpha,\gamma}$$

Функция $\overline{\Phi(\zeta,z)}$ при фиксированном $z\in D$ голоморфна относительно ζ в D и непрерывна в $\overline{D}$ (см.[2]). Поэтому $\prod_{k=1}^{n}\overline{\Phi(\zeta_k,z_k)}$ принадлежит $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ и, как следует из (10), $\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}(\mathrm{v})(z)\equiv O$.

Это и доказывает теорему.

ЕГУ, ВВМКУ Минобороны РА *Поступила 21.11.1995*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Джрбашян М.М.** К проблеме представимости аналитических функций. - Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, 1948, в. 2, с. 3-40.
2. **Джрбашян М.М.** Весовые интегральные представления гладких и голоморфных функций в единичном круге и в комплексной плоскости.- Изв. НАН Армении, матем., 1993, т. 28, № 4, с. 1-28.
3. **Шабат Б.В.** Введение в комплексный анализ: (часть 2). М.: Наука, 1985.
4. **Charpentier Ph.** Formules explicites pour les solutions minimales de l' equation $\bar{\partial}u=f$ dans la boule et dans le polydisque de C^n. - Ann. Inst. Fourier, 1980, v. 30, № 4, pp. 121-154.

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԲԱԶՄԱՇՐՋԱՆՈՒՄ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿՇՌԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացվել է Կոշիի - Գրինի տիպի ինտեգրալային ներկայացում D^n բազմաշրջանի փակման վրա ողորկ ֆունկցիաների համար: Այդ ներկայացումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$u(z)=\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}(u)(z)+\mathrm{T}_{\rho,\alpha,\gamma}(\bar{\partial}u)(z),$$

որտեղ $\mathrm{P}_{\rho,\alpha,\gamma}$ - ն $\mathrm{L}^2\left(D^n,\prod_{k=1}^{n}\left(1-|\zeta_k|^{\rho_k}\right)^{\alpha_k}|\zeta_k|^{\gamma_k}\,d\mathrm{v}_{2n}\right)$ տարածության մեջ օրթոգոնալ պրոյեկտման օպերատոր է անալիտիկ ֆունկցիաների ենթատարածության վրա: