ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 116 2016 № 4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.550

К. Л. Аветисян, А. И. Петросян

О некоторых операторах типа Бергмана с нормальными весами в шаре из $\mathbb{C}^n$

(Представлено академиком Н.У.Аракеляном 13/VII 2016)

Ключевые слова: *нормальная весовая функция, нормальная пара, пространства со смешанной нормой, операторы Бергмана.*

1. Введение и обозначения. В заметке рассмотрены введенные Шилдсом и Вильямсом операторы типа Бергмана, зависящие от нормальной пары весовых функций. Доказано, что существуют значения параметра β, при которых эти операторы ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в единичном шаре из C^n. Пусть $B=B_n:=\{z=(z_1,\cdots,z_n)\in C^n:|z|<1\}$ – открытый единичный шар в C^n и $S:=\partial B$ – его граница, единичная сфера. Скалярное произведение в C^n обозначим через $\langle z,w\rangle:=z_1\overline{w}_1+\ldots+z_n\overline{w}_n,\quad z,w\in C^n$. Всюду далее будем полагать $z=r\zeta,\, w=\rho\eta\in B,\, 0\le r,\rho<1,\, \zeta,\eta\in S$, $r=|z|=\sqrt{\langle z,z\rangle}$.

Множество всех голоморфных функций в шаре B обозначим через $H(B)$. Для функции $f(z)=f(r\varsigma)$, заданной в шаре B, ее интегральные средние порядка p на сфере $|z|=r$ обозначены, как обычно, через

$$M_p(f;r)=\|f(r\cdot)\|_{L^p(S;d\sigma)},\qquad 0\le r<1,\, 0<p\le\infty,$$

где $d\sigma-(2n-1)$-мерная поверхностная мера Лебега на сфере S, нормированная так, что $\sigma(S)=1$. Класс функций $f\in H(B)$ с «нормой» $\|f\|_{H^p}=\sup\limits_{0<r<1}M_p(f;r)$ есть обычное пространство Харди $H^p(B)$ в единичном шаре B. Определим банахово пространство $L(p,q,\beta),\quad 1\le p,q\le\infty$, $\beta\in R,$ со смешанной нормой как пространство тех измеримых функций $f(z)=f(r\zeta)$ в шаре B, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L(p,q,\beta)}:=\begin{cases}\left(\int\limits_0^1(1-r)^{\beta q-1}M_p^q(f;r)\,dr\right)^{1/q}, & 1\le q<\infty\\ ess\sup_{0<r<1}(1-r)^{\beta}M_p(f;r), & q=\infty\end{cases}$$

Подпространства $L(p,q,\beta)$, состоящие из голоморфных функций, обозначим через $H(p,q,\beta):=H(B)\cap L(p,q,\beta),\ \beta>0.$ При $p=q<\infty$ пространства $H(p,p,\beta)=A^p_{\beta p-1}$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q=\infty$ их часто называют весовыми пространствами Харди.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом в [1, 2] и развиты в дальнейшем Флеттом [3] (см, также монографии [4, 5], посвященные весовым пространствам Бергмана $H(p,p,\beta)$ в единичном круге. Много работ посвящено пространствам $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой или их подпространствам, состоящим из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$. Пространства $H(p,q,\beta)$ для голоморфных функций в единичном шаре $B\subset\mathbb{C}^n$ и бергмановские операторы на них подробно исследованы, например, в работах [6-10], а для голоморфных и n-гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$ смотри, например, в [11]. Символы $C(\alpha,\beta,\ldots), C_\alpha$ и т. п. всюду будут обозначать положительные постоянные, различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha,\beta,\ldots$. Через dV обозначим лебегову меру на B, нормированную так, что $V(B)=1$. В полярных координатах будем иметь $dV(z)= \ =2nr^{2n-1}drd\sigma(\zeta)$.

Вместо стандартных степенных весовых функций Шилдс и Вильямс [12] впервые предложили использовать более общие нормальные весовые функции. Фактически это те весовые функции, которые имеют степенные миноранты и мажоранты с положительными показателями.

Определение 1 (нормальная весовая функция [12]). Положительная непрерывная функция $\varphi(r),\ 0\le r<1$, называется *нормальной*, если найдутся постоянные $0<a<b$ и $0\le r_0<1$ такие, что

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a}\downarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{\varphi(r)}{(1-r)^b}\uparrow +\infty \quad \text{при} \quad r\to 1^-, \quad r_0\le r<1. \tag{1}$$

Здесь и далее монотонность функций всегда подразумевается в широком, нестрогом смысле. Индексы a и b для нормальной функции $\varphi(r)$ определяются неоднозначно. Типичными примерами нормальных функций являются функции вида

$$\varphi_{c,d}(r)=(1-r)^c\left(\log\frac{e}{1-r}\right)^d, \qquad c>0,\ \ d\in R,$$

причем при $c=0$ функция $\varphi_{0,d}=\left(\log\dfrac{e}{1-r}\right)^d$ уже не будет нормальной.

Определение 2 (нормальная пара функций [12]). Скажем, что пара функций $\{\varphi,\psi\}$ составляет *нормальную пару*, если функция φ нормальна и существует число α (индекс пары), $\alpha>b-1$, такое, что

$$\varphi(r)\psi(r)=(1-r^2)^\alpha, \qquad 0\le r<1. \tag{2}$$

Ввиду условия $a > b - 1$ вторая функция ψ будет интегрируемой на интервале $(0,1)$. Как показано в [12], для нормальной функции φ всегда найдется ее нормальная пара, а при более строгом условии $\alpha > b$ функция ψ сама также будет нормальной с индексами $\alpha - b$ и $\alpha - a$. Расширим область определения таких радиальных весовых функций до шара B, положив $\varphi(z) := \varphi(|z|) = \varphi(r), \psi(z) := \psi(|z|) = \psi(r)$.

Посредством нормальных весовых функций Шилдс и Вильямс [12] в единичном круге $\mathbb{D} = B_1$ предложили обобщения операторов Бергмана, которые для шара B определены в работах А.И. Петросяна [13, 14] в виде

$$P_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\varphi(z)\psi(w)}{\left(1 - \langle z, w\rangle\right)^{n+1+\alpha}} f(w)dV(w), \qquad z \in B, \tag{3}$$

(4)

$$Q_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}} f(w)dV(w), \qquad z \in B, \tag{5}$$

$$\tilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\varphi(w)}{|1 - \langle z, w\rangle|^{n+1+\alpha}} f(w)dV(w), \qquad z \in B. \tag{6}$$

Операторы (3), (4) в предельном случае $\varphi \equiv 1,\ \psi(r) = (1 - r^2)^{\alpha}$, а также операторы (5), (6) в частном случае $\varphi(r) = (1 - r^2)^{\alpha}, \psi \equiv 1$ сводятся к классическим проекторам Бергмана P_{α} (см. [4-10]),

$$P_{\alpha}(f)(z) := \gamma_{\alpha,n} \int_B \frac{(1 - |w|^2)^{\alpha}}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1+\alpha}} f(w)dV(w), \quad z \in B, \qquad \alpha > -1, \tag{7}$$

где $\gamma_{\alpha,n} := \dfrac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha + 1)}$. В случае $\varphi(r) = (1 - r^2)^{\lambda}, \psi(r) = (1 - r^2)^{\gamma}, \lambda + \gamma = \alpha$, операторы типа Бергмана (3)-(6) также хорошо известны (см. [7-11]). Для проекторов P_{α} в шаре B имеет место представление

$$f(z) = P_{\alpha}(f)(z), \qquad z \in B, \qquad \alpha > -1, \tag{8}$$

которое справедливо для всех голоморфных функций f класса $H(1,1,\alpha + 1) = A_{\alpha}^1$ или класса $H(p,q,\delta), 1 \le p,q \le \infty, 0 < \delta < \alpha + 1$.

Мы доказываем, что существуют значения параметра β, при которых общие операторы (3)-(6) ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в шаре B. Основным результатом настоящей заметки является следующая теорема типа Форелли – Рудина.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p,q \le \infty, \beta \in R$, $\{\varphi,\psi\}$, *– нормальная пара функций с индексами* a *и* b $(0 < a < b)$ *и с индексом пары* $\alpha > b - 1$ *в смысле определений 1, 2.*

(i) *Если* $-a < \beta < 1 + \alpha - b$, *то операторы* $P_{\varphi,\psi}$ *и* $\tilde{P}_{\varphi,\psi}$ *ограниченно действуют из пространства* $L(p,q,\beta)$ *в себя, т.е.*

$$P_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \to L(p,q,\beta)\,, \tag{9}$$
$$\tilde{P}_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \to L(p,q,\beta)\,. \tag{10}$$

(ii) *Если* $b-\alpha<\beta<1+a$, *то операторы* $Q_{\varphi,\psi}$ *и* $\tilde{Q}_{\varphi,\psi}$ *ограниченно действуют из пространства* $L(p,q,\beta)$ *в себя, т. е.*

$$Q_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \to L(p,q,\beta), \tag{11}$$
$$\tilde{Q}_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \to L(p,q,\beta). \tag{12}$$

Замечание 1. В частном случае, когда $p=q=\infty,\ \beta=0$, т. е. для класса $L(\infty,\infty,0)=L^{\infty}(B)$ существенно ограниченных функций в шаре, соотношения (9) и (10) доказаны в [13]. В случае $1\le p=q=1/\beta<\infty$, т. е. для невесового пространства $L(p,p,1/p)$, соотношения (11) и (12) доказаны в [13, 14], но другим методом с использованием так называемого теста Шура [4-7], который не подходит в нашем случае. Более частные случаи операторов Бергмана со степенными весами изучены в [5-11].

Замечание 2. Фактически в теореме 1 мы обобщаем результат из [13, 14] в трех направлениях: во-первых, предполагаем все значения $1\le p\le\infty$, во-вторых, рассматриваем весовые пространства, в-третьих, рассматриваем гораздо более общие пространства $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой.

2. Неравенства Харди и другие интегральные неравенства. В этом разделе приведем те леммы, которые необходимы для доказательства основной теоремы 1.

Широко известны классические неравенства Харди (см., например, [3, 15]),

$$\int_0^1 x^{-\beta-1}\left(\int_0^x h(t)dt\right)^p dx \le C(p,\beta)\int_0^1 x^{p-\beta-1}h^p(x)dx, \tag{13}$$

$$\int_0^1 (1-r)^{\beta-1}\left(\int_0^r h(t)dt\right)^p dx \le C(p,\beta)\int_0^1 (1-r)^{p+\beta-1}h^p(x)dx, \tag{14}$$

$$\int_0^1 (1-r)^{-\beta-1}\left(\int_r^1 h(t)dt\right)^p dx \le C(p,\beta)\int_0^1 (1-r)^{p-\beta-1}h^p(x)dx, \tag{15}$$

где $1\le p<\infty,\quad \beta>0,\quad h(r)\ge 0.$

Отметим, что неравенство (15) выводится из (13) линейной заменой переменных интегрирования. Для последующих доказательств нам понадобятся также обобщения неравенств (14) и (15).

Лемма 1. *Пусть* $1\le p<\infty,\ h(r)\ge 0$. *Для положительной непрерывной функции* $\varphi(r), 0\le r<1$, *найдутся постоянные* $a,\gamma\in R, \gamma+pa>0$, *и* $0\le r_0<1$ *такие, что* $\dfrac{\varphi(r)}{(1-r)^a}\downarrow$ *при* $r_0\le r<1$. *Тогда*

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-1}\varphi^p(r)\left(\int_0^r h(t)dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,a,r_0)\int_0^1 (1-r)^{p+\gamma-1}\varphi^p(r)h^p(r)dr. \qquad (16)$$

Замечание 3. Схожее с неравенством (16) другое неравенство типа Харди с участием нормальных весовых функций можно найти в [10].

Нам понадобится также другая разновидность неравенства (16).

Лемма 2. *Пусть* $1\le p<\infty$, $h(r)\ge 0$. *Для положительной непрерывной функции* $\varphi(r)$, $0\le r<1$, *найдутся постоянные* $b,\gamma\in R$, $\gamma+pb<0$, *и* $0\le r_0<1$ *такие, что* $\dfrac{\varphi(r)}{(1-r)^b}\uparrow$ *при* $r_0\le r<1$. *Тогда*

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-1}\varphi^p(r)\left(\int_r^1 h(t)dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,b,r_0)\int_0^1 (1-r)^{p+\gamma-1}\varphi^p(r)h^p(r)dr.$$

Следующая лемма является вариантом схожих оценок из [9, 12-14].

Лемма 3. *Пусть* $\{\varphi,\psi\}$ *– нормальная пара функций с индексами* a *и* b $(0<a<b)$ *и с индексом пары* $\alpha>b-1$ *в смысле определений 1-2. Если* $-a<\beta<1+\alpha-b$, *то*

$$\int_0^1 \frac{\psi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^{\beta}}d\rho \le C(\alpha,\beta,a,b,r_0)\,\frac{\psi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}, \qquad 0\le r<1.$$

Нижеследующие леммы аналогичны леммам 1-3.

Лемма 4. *Пусть* $1\le p<\infty$, $h(r)\ge 0$. *Для положительной непрерывной функции* $\varphi(r)$, $0\le r<1$, *найдутся постоянные* $b,\gamma\in R$, $\gamma-pb>0$, *и* $0\le r_0<1$ *такие, что* $\dfrac{\varphi(r)}{(1-r)^b}\uparrow$ *при* $0\le r_0<1$. *Тогда*

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\left(\int_0^r h(t)dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,b,r_0)\int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}h^p(r)dr.$$

Лемма 5. *Пусть* $1\le p<\infty$, $h(r)\ge 0$. *Для положительной непрерывной функции* $\varphi(r)$, $0\le r<1$, *найдутся постоянные* $a,\gamma\in R$, $\gamma-pa<0$, *и* $0\le r_0<1$ *такие, что* $\dfrac{\varphi(r)}{(1-r)^a}\downarrow$ *при* $r_0\le r<1$. *Тогда*

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\left(\int_r^1 h(t)dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,a,r_0)\int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}h^p(r)dr.$$

Лемма 6. *Пусть* φ *а нормальная функция с индексами* a *и* b $(0<a<b)$ *и с индексом пары* $\alpha>b-1$ *в смысле определений 1-2. Если* $b-\alpha<\beta<1+a$, *то*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^{\beta}}d\rho \le C(\alpha,\beta,a,b,r_0)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}, \qquad 0\le r<1.$$

3. Ограниченность операторов типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой. Оценки операторов (3)-(6) начинаем с оценок их интегральных средних.

Лемма 7. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\alpha > -1$, $\{\varphi, \psi\}$ *– пара положительных весовых функций. Тогда имеют место оценки*

$$M_p(\tilde{P}_{\varphi,\psi}(f);r) \le C(p,n,\alpha)\varphi(r)\int_0^1 \frac{\psi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}} M_p(f;\rho)d\rho, \quad 0 \le r < 1,$$

$$M_p(\tilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r) \le C(p,n,\alpha)\psi(r)\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}} M_p(f;\rho)d\rho, \quad 0 \le r < 1.$$

После того как доказана ограниченность операторов (3)-(6), оказывается, что $P_{\varphi,\psi}$ и $Q_{\varphi,\psi}$ не только ограниченные операторы, действующие в $L(p,q,\beta)$, но и ограниченные проекторы.

Определим новые, более общие пространства со смешанной нормой:

$$H_\beta^{p,q}(\varphi) := \left\{ f \in H(B): \| f \|_{p,q,\beta,\varphi}^q := \int_0^1 (1-r)^{\beta q-1} \varphi^q(r) M_p^q(f;r)dr < +\infty \right\},$$

где $1 \le p,q \le \infty$, $\beta \in R$, φ – некоторая (нормальная) весовая функция. В случае $q = \infty$ вместо интегральной нормы, как обычно, подразумеваем равномерную норму

$$\| f \|_{p,\infty,\beta,\varphi} := \sup_{0<r<1} (1-r)^\beta \varphi(r) M_p(f;r), \quad 1 \le p \le \infty, \quad q = \infty, \beta \in R.$$

Ясно, что при $\varphi \equiv 1$ имеем $H_\beta^{p,q}(1) = H(p,q,\beta)$.

Введем оператор умножения функции φ на функции класса $H_\beta^{p,q}(\varphi)$ и обозначим полученный в результате этого класс,

$$\Pi_\varphi(g) := \varphi g, \quad g \in H_\beta^{p,q}(\varphi), \qquad \Pi_\varphi H_\beta^{p,q}(\varphi) = \varphi \cdot H_\beta^{p,q}(\varphi).$$

Легко видеть, что $\Pi_\varphi H_\beta^{p,q}(\varphi) \subset L(p,q,\beta)$.

Действительно, по определениям данных классов имеем

$$f \in \Pi_\varphi H_\beta^{p,q}(\varphi) \Leftrightarrow f = \varphi g, \quad g \in H_\beta^{p,q}(\varphi) \Leftrightarrow f = \varphi g \in L(p,q,\beta), g \in H(B).$$

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p,q \le \infty$, $\beta \in R$, $\{\varphi,\psi\}$ *– нормальная пара функций с индексами* a *и* b $(0 < a < b)$ *и с индексом пары* $\alpha > b-1$ *в смысле определений 1-2.*

(i) *Если* $-a < \beta < 1+\alpha-b$, *то оператор* $P_{\varphi,\psi}$ *ограниченно проектирует пространство* $L(p,q,\beta)$ *на* $\Pi_\varphi H_\beta^{p,q}(\varphi)$,

$$P_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \xrightarrow{\text{onto}} \Pi_\varphi H_\beta^{p,q}(\varphi).$$

(ii) *Если* $b-\alpha < \beta < 1+a$, *то оператор* $Q_{\varphi,\psi}$ *ограниченно проектирует пространство* $L(p,q,\beta)$ *на* $\Pi_\psi H_\beta^{p,q}(\psi)$, $Q_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \xrightarrow{\text{onto}} \Pi_\psi H_\beta^{p,q}(\psi)$.

Настоящая работа первым автором выполнена при финансовой поддержке Центра математических исследований Ереванского государственного университета.

Ереванский государственный университет,
e-mails: avetkaren@ysu.am, apetrosyan@ysu.am

К. Л. Аветисян, А. И. Петросян

О некоторых операторах типа Бергмана с нормальными весами в шаре из $\mathbb{C}^n$

Рассмотрены введенные Шилдсом и Вильямсом операторы типа Бергмана, зависящие от нормальной пары весовых функций. Доказано, что существуют значения параметра β, при которых эти операторы ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в единичном шаре из C^n. Более того, эти операторы также являются ограниченными проекторами, при этом найдены образы $L(p,q,\beta)$ при проекциях.

Կ. Լ. Ավետիսյան, Ա. Ի. Պետրոսյան

Նորմալ կշիռներով $\mathbb{C}^n$-ի գնդում Բերգմանի տեսքի որոշ օպերատորների մասին

Դիտարկված են Շիլդսի և Վիլյամսի կողմից ներմուծված Բերգմանի տեսքի օպերատորներ, որոնք կախված են նորմալ կշռային ֆունկցիաների զույգից: Ապացուցված է, որ գոյություն ունեն β պարամետրի արժեքներ, որոնց համար այդ օպերատորները սահմանափակ են խառը նորմով $L(p,q,\beta)$ տարածությունների վրա C^n-ի միավոր գնդում: Ավելին, այդ օպերատորները նաև սահմանափակ պրոյեկտորներ են, ընդ որում գտված են $L(p,q,\beta)$ դասերի պատկերները պրոյեկցիաների դեպքում:

K. L. Avetisyan, A. I. Petrosyan

On Some Bergman Type Operators with Normal Weights Over the Ball in $\mathbb{C}^n$

C^n-generalizations of Bergman type operators introduced by Shields and Williams depending on a normal pair of weight functions are studied. We find the values of parameter β for which these operators are bounded on mixed norm spaces $L(p,q,\beta)$ over the unit ball in C^n. Moreover, these operators are also bounded projectors, and the images of $L(p,q,\beta)$ under the projections are found.

Литература

1. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* – Math. Z. 1932. V. 34. P. 403-439.
2. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* – Quart. J. Math. (Oxford). 1941. V. 12. P. 221-256.
3. *Flett T.M.* – J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 38. P. 746-765.
4. *Djrbashian A.E., Shamoian F.A.* Topics in the Theory of A_α^p Spaces. Teubner - Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig. 1988.
5. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman Spaces. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg. 2000.
6. *Rudin W.* Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York. 1980.
7. *Zhu K.* Spaces of holomorphic functions in the unit ball. Graduate Texts in Mathematics, 226, Springer-Verlag. New York. 2005.
8. *Jevtić M.* – Complex Variables Theory Appl. 1987. V. 8. P. 293-301.
9. *Ren G., Shi J.* – Chinese Ann. Math., Ser. B. 1997. V. 18. N 3. P. 265-276.
10. *Shi J.H., Ren G.B.* – Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126. P. 3553-3560.
11. *Avetisyan K.* – J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 291. P. 727-740.
12. *Shields A.L., Williams D.L.* – Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 162. P. 287-302.
13. *Петросян А. И.* – Изв. НАН Армении, Математика. 2011. V. 46. N 5. P. 53-64.
14. *Petrosyan A. I., Gapoyan N. T.* – Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci. 2013. N 1. P. 17-23.
15. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. Мир. 1974.