Dep. in ARMNIINTI 09.03.00 N20-Ar00

Метод Бернулли в многомерном случае

А.Б.Нерсесян А.В.Погосян

Институт математики НАН РА

Пр. Баграмяна 24 б, Ереван 375019, Республика Армении

e-mail: nerses@instmath.sci.am, arnak@instmath.sci.am

Введение

Аппроксимация гладкой функции на конечном отрезке частичной суммой ряда Фурье (или классической тригонометрической интерполяционной формулой), вообще говоря, неэффективна из за очень медленной L_2-сходимости и существенным влиянием явления Гиббса вблизи границы.

Не так давно были предложены методы, позволяюшие успешно преодолеть явление Гиббса и получить хорошее приближение для гладкой функции [1-6]. В работе [1] используются значения производных разлагаемой функции на концах отрезка. Иной путь связан или с полиномами Бернулли (Eckhoff, Wasberg [2,3]) (для одномерного случая), или с полиномами Гегенбауера (Gelb, Gottlieb [4,5]) (для одномерного и двухмерного случаев).

Ниже применяется метод Бернулли для функции двух переменных. Подробное изучение асимптотики коэффициентов Фурье, а также расщепление основной системы уравнений на самостоятельные системы, позволили построить достаточно эффективный алгоритм аппроксимации гладких в квадрате функций двух переменных. Данный подход можно применить и в случае большей размерности.

Численные результаты, проведенные применением системы MATHEMATICA 3.0 (см. [7]), подтверждают эффективность построенных алгоритмов. Заметим, что ранее (см. [3]) эффективность метода Бернулли в двухмерном случае подвергалась сомнению.

1. Метод Бернулли в одномерном случае

Кратко изложим метод Бернулли для функции одной переменной (подробности см. в [2]).

1.1. Пусть $f \in C^{Q+2}[-1,1]$ и

$$f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\pi nt}dt, \ |n| \leq N \tag{1.1}$$

ее известные коэффициенты Фурье. Введем следующие обозначения

$$A_k = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \ k = 0, 1, \cdots, Q. \tag{1.2}$$

Общеизвестна следующая формула

Лемма 1. *Пусть* $f(x) \in C^{Q+1}[-1,1]$. *Для* $n \neq 0$

$$f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{Q}\frac{A_k}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^{Q+1}}\int_{-1}^{1} f^{(Q+1)}(t)e^{-i\pi nt}dt. \tag{1.3}$$

Формула (1.3) позволяет представить функцию f в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{Q} A_k B_k(x) + w(x), \tag{1.4}$$

где $w(x)$ некоторая Q раза непрерывно дифференцируемая на R и периодическая (с периодом два) функция и $w(x) \in C^{Q+2}[-1,1]$, а $B_k(x)$- полиномы Бернулли, коэффициенты Фурье которых имеют вид

$$B_{k,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, & \pm1, \pm2, \cdots \\ & \\ 0, & n = 0, \end{cases} \qquad k = 0, \cdots, Q,$$

а сами они определяются следующей рекурентной формулой

$$B_0(x) = \frac{x}{2},\ B_k(x) = \int B_{k-1}(x)dx,\ x \in [-1,1],\ k = 1,2,\cdots,$$

где константа интегрирования вычисляется из условия

$$\int_{-1}^{1} B_k(t)dt = 0,\ k = 1,2,\cdots.$$

Коэффициенты Фурье функции $w(x)$ определяются по формулам

$$w_n = f_n - \sum_{k=0}^{Q} A_k B_{k,n},\ n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \tag{1.5}$$

которые следуют из (1.4). Из (1.4) придем к следующей аппроксимационной формуле для f

$$\sum_{n=-N}^{N} f_n e^{i\pi n x} + \sum_{k=0}^{Q} A_k \left(B_k(x) - \sum_{n=-N}^{N} B_{k,n} e^{i\pi n x} \right), \tag{1.6}$$

которая имеет скорость сходимости (см. [2])) порядка $O(\frac{1}{N^{Q+1}})$, $N \to \infty$.

Для определения чисел A_k ($k = 0, \cdots, Q$) воспользуемся соотношением (1.5). Так как $w_n = O(\frac{1}{n^{Q+2}})$, $n \to \infty$, а $f_n = O(\frac{1}{n})$, $n \to \infty$, то, заменив (1.5) следующей системой

$$f_n = \sum_{k=0}^{Q} A_k^f B_{k,n},\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty, \tag{1.7}$$

мы сделаем ошибку порядка $O(\frac{1}{N^{Q+2}})$, $N \to \infty$. В [3] показано, что ошибка $|A_k - A_k^f|$ имеет порядок $O(\frac{1}{N^{Q-k+1}})$, $N \to \infty$. В [2] подробно исследовано решение системы (1.7).

Пусть теперь вместо коэффициентов Фурье известны значения функции f на равномерной сети $x_k = \frac{2k}{2N+1}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N$. Обозначим

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k) e^{-i\pi n x_k},\ n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N. \tag{1.8}$$

Аналогично (1.6) придем к следующей интерполяционной формуле

$$\sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}_n e^{i\pi nx} + \sum_{k=0}^{Q} A_k \left(B_k(x) - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{B}_{k,n} e^{i\pi nx} \right), \tag{1.9}$$

где приближенные значения чисел A_k определяются из системы

$$\widehat{f}_n = \sum_{k=0}^{Q} A_k^d \widehat{B}_{k,n},\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty. \tag{1.10}$$

Здесь также ошибка $|A_k - A_k^d|$ имеет порядок $O(\frac{1}{N^{Q-k+1}})$, $N \to \infty$.

1.2.Упростим теперь путь решения систем (1.7) и (1.10). Заметим, что при четных k $B_{k,-n} = -B_{k,n}$, а при нечетных - $B_{k,-n} = B_{k,n}$. Это позволяет расщепить (1.7) на две самостоятельные системы

$$\frac{f_n - f_{-n}}{2} = \sum_{k=0}^{Q_1} A_{2k}^f B_{2k,n},\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty, \tag{1.11}$$

$$\frac{f_n + f_{-n}}{2} = \sum_{k=0}^{Q_2} A_{2k+1}^f B_{2k+1,n},\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty, \tag{1.12}$$

где $Q_1 = Q_2 = \frac{Q+1}{2}$ при нечетных Q и $Q_1 = Q/2 + 1,\ Q_2 = Q/2$ при четных Q.

Аналогично из (1.10) придем к следующим системам

$$\frac{\widehat{f}_n - \widehat{f}_{-n}}{2} = \sum_{k=0}^{Q_1} A_{2k}^d \widehat{B}_{2k,n},\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty, \tag{1.13}$$

$$\frac{\widehat{f}_n + \widehat{f}_{-n}}{2} = \sum_{k=0}^{Q_2} A_{2k+1}^d \widehat{B}_{2k+1,n},\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty. \tag{1.14}$$

Системы (1.11)-(1.14) позволяют более точно вычислить числа A_k при четных k и Q.

1.3. Расщепление (1.11)-(1.14) позволяет получать, вообще говоря, меньшее накопление ошибок, чем при прямом решении систем (1.7) и (1.10). Приведем некоторые численные результаты. В таблицах 1.1 и 1.3

(см. п. 3) представлены ошибки $r_k^f = |A_k - A_k^f|$ и $r_k^d = |A_k - A_k^d|$ соответственно, при четных Q и k, для функции $\sin(x-1)$, где числа A_k^f и A_k^d вычислены из (1.7) и (1.10) при $n = -N, N, N/2, -N/2, 2N/3, -2N/3, \cdots$, как предложено в [4]. Те же самые ошибки представлены в таблицах 1.2 и 1.4 где числа A_k^f и A_k^d вычислены из (1.11), (1.12) и (1.13), (1.14) при $n = -N$, N, $N/2$, $-N/2$, $2N/3$, $-2N/3$, $\cdots$. Сравнение показывает, что в некоторых случаях точность увеличивается на два порядка.

В таблицах 1.5 и 1.6 представлены равномерные ошибки применения формулы (1.6), где вместо чисел A_k подставлены числа A_k^f вычисленные из систем (1.7) и (1.11), (1.12) соответственно, для функции $\sin(x-1)$. Сравнение показывает, что по сравнению с алгоритмом [2], точность увеличивается в некоторых случаях на порядок. Аналогичные эксперименты показывают, что формула (1.9) по сравнению с (1.6) более вяло реагирует на повышение точности вычисления некоторых из чисел A_k. В этом случае, для функции $\sin(x-1)$, ошибка практически остается прежней. Соответствующие результаты представлены в таблицах 1.7 и 1.8.

2. Метод Бернулли в двухмерном случае

2.1 Пусть $f(x) \in C^{Q+2}([-1,1]\times[-1,1])$ и

$$f_{nm} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)e^{-i\pi(nx+my)}dxdy, \ \ |n|,|m| \leq N \tag{2.1}$$

ее коэффициенты Фурье.

Лемма 2. *Пусть $f(x) \in C^{Q+1}([-1,1]\times[-1,1])$. Для $n,m \neq 0$ справедлива формула*

$$f_{nm} = \frac{(-1)^{n+1}}{4}\sum_{k=0}^{Q}\frac{1}{(i\pi n)^{k+1}}\int_{-1}^{1}\left(f^{(k,0)}(1,t) - f^{(k,0)}(-1,t)\right)e^{-i\pi m t}dt+$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{4}\sum_{s=0}^{Q}\frac{1}{(i\pi m)^{s+1}}\int_{-1}^{1}\left(f^{(0,s)}(t,1) - f^{(0,s)}(t,-1)\right)e^{-i\pi n t}dt-$$

$$-\frac{(-1)^{n+m}}{4}\sum_{s=0}^{Q}\sum_{k=0}^{Q}\frac{\Delta_{ks}}{(i\pi n)^{k+1}(i\pi m)^{s+1}}+ \tag{2.2}$$

$$+\frac{1}{4(i\pi n)^{Q+1}(i\pi m)^{Q+1}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f^{(Q+1,Q+1)}(t,z)e^{-i\pi nt}e^{-i\pi mz}dzdt,$$

rge

$$f^{(k,s)}(x,y)=\frac{\partial^{k+s}}{\partial x^k\partial y^s}f(x,y),$$

$$\Delta_{k,s}=f^{(k,s)}(1,1)-f^{(k,s)}(-1,1)-f^{(k,s)}(1,-1)+f^{(k,s)}(-1,-1).$$

Доказательство. Применим лемму 1 к первому интегралу в (2.1)

$$f_{nm}=\frac{(-1)^{n+1}}{4}\sum_{k=0}^{Q}\frac{1}{(i\pi n)^{k+1}}\int_{-1}^{1}\left(f^{(k,0)}(1,y)-f^{(k,0)}(-1,y)\right)e^{-i\pi my}dy+$$

$$+\frac{1}{4(i\pi n)^{Q+1}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f^{(Q+1,0)}(x,y)e^{-i\pi(nx+my)}dxdy,\ n\neq 0. \tag{2.3}$$

Применим теперь лемму 1 ко второму интегралу во втором слагаемом в (2.3)

$$f_{nm}=\frac{(-1)^{n+1}}{4}\sum_{k=0}^{Q}\frac{1}{(i\pi n)^{k+1}}\int_{-1}^{1}\left(f^{(k,0)}(1,y)-f^{(k,0)}(-1,y)\right)e^{-i\pi my}dy+$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{4}\sum_{s=0}^{Q}\frac{1}{(i\pi m)^{s+1}}\int_{-1}^{1}\left(f^{(Q+1,s)}(x,1)-f^{(Q+1,s)}(x,-1)\right)e^{-i\pi nx}dx+$$

$$+\frac{1}{4(i\pi n)^{Q+1}(i\pi m)^{Q+1}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f^{(Q+1,Q+1)}(x,y)e^{-i\pi(nx+my)}dxdy,\ n,m\neq 0. \tag{2.4}$$

Применив, наконец, лемму 1 ко второму слагаемому в (2.4) получим (2.2).•

Лемма 2 позволяет представить частичный ряд Фурье

$$f_N(x,y) = \sum_{n,m=-N}^{N} f_{nm} e^{i\pi(nx+my)}$$

следующим образом

$$f_N(x,y) = F(x,y) + w_N(x,y), \tag{2.5}$$

где

$$F(x,y) = \sum_{k=0}^{Q} B_k(x)\left(f^{(k,0)}(1,y) - f^{(k,0)}(-1,y)\right) + \\ + \sum_{s=0}^{Q} B_s(y)\left(f^{(0,s)}(x,1) - f^{(0,s)}(x,-1)\right) -$$

$$\begin{aligned} -\sum_{s=0}^{Q}\sum_{k=0}^{Q} \Delta_{ks} B_k(x) B_s(y) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{Q} B_k(x)\int_{-1}^{1}\left(f^{(k,0)}(1,t) - f^{(k,0)}(-1,t)\right)dt - \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{Q} B_s(y)\int_{-1}^{1}\left(f^{(0,s)}(t,1) - f^{(0,s)}(t,-1)\right)dt + \\ + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t,y)dt + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x,t)dt.$$

$w_N(x,y)$ аппроксимирует некоторую функцию $w(x,y)$, которая имеет непрерывные и периодические (с периодом два) на $R \times R$ частные производные $w^{(k,s)}(x,y)$, $k,s = 0,1,\cdots,Q$ и имеет вид

$$\begin{aligned} w_N(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{n,m=-N}^{N}{}' \frac{e^{i\pi(nx+my)}}{(i\pi m)^{Q+1}(i\pi n)^{Q+1}} \times \\ \times \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f^{(Q+1,Q+1)}(z,t) e^{-i\pi(nt+mz)} dt dz - f_{00}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где штрих означает, что нулевые члены в суммах отсутствуют.

(2.5) позволяет представить функцию $f(x,y)$ в виде

$$f(x,y) = F(x,y) + w(x,y). \tag{2.8}$$

Для определения коэффициентов Фурье функции $w(x,y)$, из (2.8) получаем следующие соотношения

$$w_{nm} = f_{nm} - F_{nm},\ n,m = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \tag{2.9}$$

где F_{nm} вычисляются из (2.6)

$$F_{00} = 2f_{00},\ F_{n0} = f_{n0},\ n \neq 0,\ F_{0m} = f_{0m},\ m \neq 0,$$

$$F_{nm} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{Q} \frac{1}{(i\pi n)^{k+1}} \int_{-1}^{1} \left(f^{(k,0)}(1,y) - f^{(k,0)}(-1,y) \right) e^{-i\pi m y} dy +$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{2} \sum_{s=0}^{Q} \frac{1}{(i\pi m)^{s+1}} \int_{-1}^{1} \left(f^{(0,s)}(x,1) - f^{(0,s)}(x,-1) \right) e^{-i\pi n x} dx -$$

$$- \frac{(-1)^{m+n}}{4} \sum_{s=0}^{Q} \sum_{k=0}^{Q} \frac{\Delta_{ks}}{(i\pi n)^{k+1} (i\pi m)^{s+1}},\ n,m \neq 0.$$

Подставляя (2.9) в (2.5) получим следующую аппроксимационную формулу

$$f_N(x,y) = F(x,y) + \sum_{n,m=-N}^{N} (f_{nm} - F_{nm}) e^{i\pi(nx+my)}. \tag{2.10}$$

Введем теперь обозначение

$$R_N(f) = f(x,y) - f_N(x,y).$$

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y) \in C^{Q+1}([-1,1] \times [-1,1])$. *Тогда*

$$R_N(f) = O(\frac{1}{N^{Q+1}}),\ N \to \infty.$$

Для **доказательства** достаточно заметить, что

$$R_N(f) = w(x,y) - w_N(x,y),$$

где $w_N(x,y)$ -ряд Фурье функции $w(x,y)$ и имеет вид (2.7).•

В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x,y) = sin(5.3x + 2.2y + 2). \tag{2.11}$$

В таблице 2.1 представлены равномерные погрешности применения формулы (2.10) для примера (2.11) при различных значениях Q и N.

2.2. Теорема 1, а также результаты таблицы 2.1, относятся к случаю, когда функкия $F(x,y)$ и ее коэффициенты Фурье известны. Если они вычисляются приближенно, то к $R_N(f)$ добавляется и ошибка этого приближения.

Для восстановления функции $F(x,y)$ согласно формуле (2.6) по известным коэффициентам Фурье f_{nm}, $|n|,|m| \leq N$, надо сначала вычислить коэффициенты Фурье функций

$$u_k(y) = f^{(k,0)}(1,y) - f^{(k,0)}(-1,y),\, y \in [-1,1],\, k = 0,1,\cdots,M, \tag{2.12}$$

$$v_s(x) = f^{(0,s)}(x,1) - f^{(0,s)}(x,-1),\, x \in [-1,1],\, s = 0,1,\cdots,M, \tag{2.13}$$

а также числа $\Delta_{k,s}$, $k,s = 0,1,\cdots,M$, где $M \geq Q$ некоторое целое число.

Для вычисления коэффициентов Фурье $u_{k,m}$ ($m = 0,\pm1,\cdots,\pm N$) функций $u_k(y)$ ($k = 0,1,\cdots,M$), воспользуемся формулой (2.3), где вместо Q взято M. При достаточно больших $n = O(N)$, $N \to \infty$ второе слагаемое в правой части имеет порядок $O(\frac{1}{N^{M+2}})$, $N \to \infty$, а первое- только $O(\frac{1}{N})$, $N \to \infty$. Если отбросить второе слагаемое в (2.3), то для определения чисел $u^f_{k,m}$ получится следующая система

$$f_{nm} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{M} \frac{u^f_{k,m}}{(i\pi n)^{k+1}},\, |n| = O(N) \leq N,\, N \to \infty,\ m = 0,\pm1,\cdots,\pm N. \tag{2.14}$$

Ошибка $|u^f_{k,m} - u_{k,m}|$ имеет порядок $O(\frac{1}{N^{M-k+1}})$, $N \to \infty$, $k = 0, 1, \cdots, M$. Как и в пункте 1, систему (2.14) можно расщепить на следующие самостоятельные системы

$$f_{nm} - f_{(-n)m} = \\ (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{M_1} \frac{u^f_{2k,m}}{(i\pi n)^{2k+1}}, \ |n| = O(N) \le N, \ N \to \infty, \ m = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \tag{2.15}$$

$$f_{nm} + f_{(-n)m} = \\ (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{M_2} \frac{u^f_{2k+1,m}}{(i\pi n)^{2k+2}}, \ |n| = O(N) \le N, \ N \to \infty, \ m = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \tag{2.16}$$

где $M_1 = M_2 = \frac{M+1}{2}$ при нечетных M и $M_1 = M/2 + 1, \ M_2 = M/2$ при четных M. Аналогично, для коэффициентов Фурье $v_{s,n}$ $(n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N)$ функций $v_s(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, M)$ получается система

$$f_{nm} = \frac{(-1)^{m+1}}{2} \sum_{s=0}^{M} \frac{v^f_{s,n}}{(i\pi m)^{s+1}}, \ \ |m| = O(N) \le N, \ \ N \to \infty, \ \ n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \tag{2.17}$$

где ошибка $|v^f_{s,n} - v_{s,n}|$ имеет порядок $O(\frac{1}{N^{M-s+1}})$, $N \to \infty$, $s = 0, 1, \cdots, M$, или системы

$$f_{nm} - f_{n(-m)} = \\ (-1)^{m+1} \sum_{s=0}^{M_1} \frac{u^f_{2s,n}}{(i\pi m)^{2s+1}}, \ |m| = O(N) \le N, \ N \to \infty, \ n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \tag{2.18}$$

$$f_{nm} + f_{n(-m)} = \\ (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{M_2} \frac{u^f_{2s+1,n}}{(i\pi m)^{2s+2}}, \ |m| = O(N) \le N, \ N \to \infty, \ n = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \tag{2.19}$$

Числа $\Delta_{k,s}$ восстанавливаются из системы

$$f_{nm} = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{M} \frac{u_{k,m}}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{(-1)^{m+1}}{2} \sum_{s=0}^{M} \frac{v_{s,n}}{(i\pi m)^{s+1}} - \\ - \frac{(-1)^{n+m}}{4} \sum_{s=0}^{M} \sum_{k=0}^{M} \frac{\Delta^f_{k,s}}{(i\pi n)^{k+1} (i\pi m)^{s+1}}, \ |n|, |m| = O(N) \le N, \ \ N \to \infty, \tag{2.20}$$

которая получается из (2.2) ($Q \equiv M$), если отбросить последний член, который имеет порядок $O(\frac{1}{n^{2M+4}})$, $n \to \infty$. Ошибка $|\Delta^f_{r,r} - \Delta_{r,r}|$ имеет порядок $O(\frac{1}{N^{2M-2r+2}})$, $N \to \infty$. Все остальные числа $\Delta_{k,s}$ $k, s \leq r$ определяются с большей точностью. Если вместо чисел $u_{k,n}$ и $v_{s,m}$ подставить числа $u^f_{k,n}$ и $v^f_{s,m}$, которые получаются из систем (2.14) и (2.17), то для определения чисел $\Delta_{k,s}$ получим следующую систему

$$f_{nm} = \frac{(-1)^{n+m}}{4} \sum_{s=0}^{M} \sum_{k=0}^{M} \frac{\Delta^f_{k,s}}{(i\pi n)^{k+1}(i\pi m)^{s+1}}, \; |n|, |m| = O(N) \leq N, \;\; N \to \infty, \tag{2.21}$$

где ошибка $|\Delta_{rr} - \Delta^f_{rr}|$ $r = 0, 1, \cdots, M$ уже имеет порядок $O(\frac{1}{N^{M-2r}})$, $N \to \infty$. Заметим, однако, что эта оценка не обеспечивает сходимость для $r \geq M/2$. Как и выше, расщепим (2.21) на следуюшие самостоятельные системы

$$\begin{aligned} & f_{nm} + f_{(-n)m} + f_{n(-m)} + f_{(-n)(-m)} = \\ & \quad (-1)^{n+m} \sum_{s=0}^{M_2} \sum_{k=0}^{M_2} \frac{\Delta^f_{2k+1,2s+1}}{(i\pi n)^{2k+2}(i\pi m)^{2s+2}}, \; |n|, |m| = O(N) \leq N, \;\; N \to \infty. \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} & f_{nm} + f_{(-n)m} - f_{n(-m)} - f_{(-n)-m} = \\ & \quad (-1)^{n+m} \sum_{s=0}^{M_1} \sum_{k=0}^{M_2} \frac{\Delta^f_{2k+1,2s}}{(i\pi n)^{2k+2}(i\pi m)^{2s+1}}, \; |n|, |m| = O(N) \leq N, \;\; N \to \infty. \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} & f_{nm} - f_{(-n)m} + f_{n(-m)} - f_{(-n)(-m)} = \\ & \quad (-1)^{n+m} \sum_{s=0}^{M_2} \sum_{k=0}^{M_1} \frac{\Delta^f_{2k,2s+1}}{(i\pi n)^{2k+1}(i\pi m)^{2s+2}}, \; |n|, |m| = O(N) \leq N, \;\; N \to \infty. \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} & f_{nm} - f_{(-n)m} - f_{n(-m)} + f_{(-n)(-m)} = \\ & \quad (-1)^{n+m} \sum_{s=0}^{M_1} \sum_{k=0}^{M_1} \frac{\Delta^f_{2k,2s}}{(i\pi n)^{2k+1}(i\pi m)^{2s+1}}, \; |n|, |m| = O(N) \leq N, \;\; N \to \infty. \end{aligned} \tag{2.25}$$

2.3 Расщепление (2.22)-(2.25) позволяет эффективно и быстро решать (2.21). Представим некоторые численные результаты. В таблицах 3.1-3.8 представлены ошибки $\max\limits_{-N \leq m \leq N} |u_{k,m} - u^f_{k,m}|$ для примера (2.11), для различных значений N, M и k. Числа $u^f_{k,m}$ вычислены из систем (2.15), (2.16) при $n = N$, $-N$, $N/2$, $-N/2$, $2N/3$, $-2N/3$ и так далее.

Результаты показывают, что точность приближения для $k = 0, 1, 2, 3$ очень быстро растет с увеличением M, и для данного примера, при $2N+1 = 257$ имеем точность порядка $10^{-7} - 10^{-8}$. При $k = 6, 7$ погрешность очень большая, но надо иметь в виду что числа $\max\limits_{|y|\leq 1} |u_k(y)|$- порядка $6000 - 150000$ при этих k. При больших N и M заметны ошибки накопления.

В таблицах 3.9-3.17 представлены относительные $\frac{|\Delta_{rr} - \Delta_{rr}^f|}{|\Delta_{rr}|}$ (в скобках) и абсолютные $|\Delta_{rr} - \Delta_{rr}^f|$ погрешности для различных значений N, M и r для примера (2.11). Приближенные значения получены из систем (2.22)-(2.25), где использованы значения $n = N, -N, N/2, -N/2, 2N/3, -2N/3$ и так далее.

Как показывают результаты, для больших M Δ_{00} и Δ_{11} вычисляются практически точно уже при $2N + 1 = 129$ и абсолютная и относительная погрешности имеют порядок $10^{-7} - 10^{-9}$. При малых r обе погрешности почти одинаковы, но, с увеличением r, они все больше разнятся из за быстро растущих значений производных. При больших N и $M = 6, 7$ уже существенны ошибки накопления.

По уже известным приближенным значениям $\Delta_{k,s}$, $u_{k,m}$ функции $u_k(y)$ восстанавливаются, согласно формуле (1.6)

$$\begin{aligned} u_k^N(y) = \sum_{s=0}^{M} \Delta_{k,s} \left(B_s(y) - \sum_{m=-N}^{N} B_{s,m} e^{i\pi m y} \right) + \\ + \sum_{m=-N}^{N} u_{k,m}^f e^{i\pi m y}, \ k = 0, 1, \cdots, M. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Обозначим теперь

$$LA_k = \sqrt{\int_{-1}^{1} |u_k(y) - u_k^N(y)|^2 dy},$$

$$LR_k = \frac{\sqrt{\int_{-1}^{1} |u_k(y) - u_k^N(y)|^2 dy}}{\sqrt{\int_{-1}^{1} |u_k(y)|^2 dy}}.$$

В таблицах 3.17-3.24 представлены числа LA_k (в скобках) и LR_k для примера (2.11), для различных значений M, N и k. Эксперименты показывают, что функции $u_k(y)$, $k = 0, 1, 2$ востанавливаются с хорошей средней ошибкой (порядка $10^{-7} - 10^{-9}$) при $M = 4$ и $2N + 1 = 129$. Аналогичные оценки получаются для равномерных погрешностей. Интересно, что LR_k-ошибка почти совпадает с относительной погрешностью в таблицах 3.9-3.16. С увеличением k LA_k ошибка ухудшается ($LA_k >> 1$), так как функции $u_k(y)$ принимают большие значения, но LR_k ошибка попрежнему имеет порядок $10^{-2} - 10^{-3}$.

Для функции $v_k(x)$ получается формула, аналогичная (2.26)

$$\begin{aligned} v_s^N(x) = \sum_{k=0}^{M} \Delta_{k,s} \left(B_k(x) - \sum_{n=-N}^{N} B_{k,n} e^{i\pi nx} \right) + \\ + \sum_{n=-N}^{N} v_{k,n}^f e^{i\pi nx}, \ k = 0, 1, \cdots, M. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Для восстановления функции $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x,t)dt$, $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t,y)dt$ достаточно применить формулу (1.6).

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x,t)dt \sim \sum_{n=-N}^{N} f_{n0} e^{i\pi nx} + \sum_{k=0}^{M} u_{k,0} \left(B_k(x) - \sum_{n=-N}^{N} B_{k,n} e^{i\pi nx} \right), \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t,y)dt \sim \sum_{m=-N}^{N} f_{0m} e^{i\pi my} + \sum_{s=0}^{M} v_{s,0} \left(B_s(y) - \sum_{m=-N}^{N} B_{s,m} e^{i\pi my} \right). \tag{2.29}$$

В таблицах 3.25-3.27 представлены равномерные погрешности применения формулы (2.10), где неизвестные функции вычислены, согласно формулам (2.26)- (2.29), в которых числа $\Delta_{k,s}$, $u_{s,m}$ и $v_{k,n}$ получены из систем (2.15), (2.16), (2.18), (2.19), (2.22)-(2.25) при $n = N$, $-N$, $N/2$, $-N/2$, $2N/3$, $-2N/3$ и так далее, для различных значений $M = Q, Q + 1, Q + 2$ соответственно. С увеличением M точность увеличивается, так как более точно восстанавливается функция $F(x, y)$. Очевидно приближение к результатам таблицы 2.1.

2.4. Пусть теперь, вместо коэффициентов Фурье, известны значения функции $f(x_k, x_p)$, $x_k = \frac{2k}{2N+1}$, $k, p = 0, \pm 1, \cdots, \pm N$. Обозначим

$$\widehat{f}_{nm} = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k,p=-N}^{N} f(x_k, x_p) e^{-i\pi(nx_k + mx_p)}, \ n, m = 0, \pm 1, \cdots, \pm N. \quad (2.30)$$

Из (2.8), для определения $\widehat{w}_{nm}$, получаем следующие соотношения

$$\widehat{w}_{nm} = \widehat{f}_{nm} - \widehat{F}_{nm}, \ n, m = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \quad (2.31)$$

где $\widehat{F}_{nm}$ получаются из (2.6). Из представления (2.8) получим следующую интерполяционную формулу для $f \in C^{Q+1}([-1,1] \times [-1,1])$

$$\widehat{f}_N(x, y) = F(x, y) + \sum_{n,m=-N}^{N} (\widehat{f}_{nm} - \widehat{F}_{nm}) e^{i\pi(nx+my)}. \quad (2.32)$$

Введем обозначение

$$\widehat{R}_N(f) = f(x, y) - \widehat{f}_N(x, y),$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C^{Q+1}([-1,1] \times [-1,1])$. *Тогда*

$$\widehat{R}_N(f) = O(\frac{1}{N^{Q+1}}), \ N \to \infty.$$

Для **доказательства** достаточно заметить, что

$$\widehat{R}_N(f) = w(x, y) - \widehat{w}_N(x, y),$$

где $\widehat{w}_N(x, y)$ -классическая интреполяция функции $w(x, y)$.•

В таблице 4.1 представлены равномерные погрешности применения формулы (2.32), для примера (2.11), при различных значениях Q и N. Результаты таблицы 4.1, как и следовало ожидать, уступают оценкам таблицы 2.1 в $2-3$ раза (в некоторых местах существенны ошибки накопления).

2.5. Для восстанавления функции $F(x, y)$ по формуле (2.6) по известным значениям $f(x_k, x_p)$, надо сначала вычислить значения функции $u_k(y)$

и $v_s(x)$ на равномерной сети $x_k = \frac{2k}{2N+1}$, $k = 0, \pm 1, \cdots, \pm N$. Для этого надо решить системы (1.10) или (1.13), (1.14) для всех функций $f(x, x_p)$, $f(x_p, y)$ $p = 0, \pm 1, \cdots, \pm N$.

Для вычисления чисел $u_k(x_s)$ имеем систему

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k, x_s) e^{-i\pi m x_k} = \\
&= \sum_{k=0}^{M} \widehat{B}_{k,m} u_k^d(x_s),\ |m| = O(N) \leq N,\ N \to \infty,\ \ s = 0, \pm 1, \cdots, \pm N,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k, x_s) e^{-i\pi m x_k} - \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k, x_s) e^{i\pi n x_k} = \\
&= 2 \sum_{k=0}^{M_1} \widehat{B}_{2k,m} u_{2k}^d(x_s),\ |m| = O(N) \leq N,\ N \to \infty,\ \ s = 0, \pm 1, \cdots, \pm N,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k, x_s) e^{-i\pi m x_k} + \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f(x_k, x_s) e^{i\pi m x_k} = \\
&= 2 \sum_{k=0}^{M_2} \widehat{B}_{2k+1,m} u_{2k+1}^d(x_s),\ |m| = O(N) \leq N,\ N \to \infty,\ \ s = 0, \pm 1, \cdots, \pm N,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

где $M_1 = M_2 = \frac{M+1}{2}$ при нечетных M и $M_1 = M/2+1$, $M_2 = M/2$ при четных M. Аналогично для вычисления чисел $v_s(x_k)$ получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^{N} f(x_k, x_s) e^{-i\pi n x_s} = \\
&\qquad = \sum_{s=0}^{M} \widehat{B}_{s,n} v_s^d(x_k),\ \ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty,\ \ k = 0, \pm 1, \cdots, \pm N,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

или

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^{N} f(x_k, x_s) e^{-i\pi n x_s} - \frac{1}{2N+1} \sum_{s=-N}^{N} f(x_k, x_s) e^{i\pi n x_s} = \\
&= 2 \sum_{s=0}^{M_1} \widehat{B}_{2s,m} v_{2s}^d(x_k),\ |n| = O(N) \leq N,\ N \to \infty,\ \ k = 0, \pm 1, \cdots, \pm N,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{s=-N}^{N} f(x_k,x_s)e^{-i\pi n x_s} + \frac{1}{2N+1}\sum_{s=-N}^{N} f(x_k,x_s)e^{i\pi n x_s} =$$
$$= 2\sum_{s=0}^{M_2}\widehat{B}_{2s+1,n}u^d_{2k+1}(x_k),\ |n| = O(N) \le N,\ N\to\infty,\ \ k = 0,\pm1,\cdots,\pm N. \tag{2.38}$$

Ошибки $|u_k(x_s)-u_k^d(x_s)|$ и $|v_k(x_s)-v_k^d(x_s)|$ имеют порядок $O(\frac{1}{N^{M-k+1}})$, $N\to\infty$ для всех $s = 0,\pm1,\cdots,\pm N$.

По имеющимся числам $u_k(x_s)$ числа $\Delta_{k,s}$ можно найти из следующей системы (см. систему (1.10))

$$\widehat{u}_{k,n} = \sum_{s=0}^{M}\widehat{B}_{s,n}\Delta^d_{k,s},\ \ |n| = O(N) \le N,\ \ k,0,\cdots,M \tag{2.39}$$

где ошибка $|\Delta_{rr}-\Delta^d_{rr}|$ $r = 0,1,\cdots,M$ имеет порядок $O(\frac{1}{N^{M-2r}})$, $N\to\infty$. Все остальные числа $\Delta_{k,s}$ $k,s = 0,\cdots,r$ вычисляются с большей точностью. Расщепим систему (2.39) на две самостоятельные системы

$$\widehat{u}_{k,n}-\widehat{u}_{k,-n} = 2\sum_{s=0}^{M_1}\widehat{B}_{2s,n}\Delta^d_{k,2s},\ \ |n| = O(N) \le N,\ \ k,0,\cdots,M \tag{2.40}$$

$$\widehat{u}_{k,n}+\widehat{u}_{k,-n} = 2\sum_{s=0}^{M_2}\widehat{B}_{2s+1,n}\Delta^d_{k,2s+1},\ \ |n| = O(N) \le N,\ \ k,0,\cdots,M \tag{2.41}$$

где $M_1 = M_2 = \frac{M+1}{2}$ при нечетных M и $M_1 = M/2+1,\ M_2 = M/2$ при четных M. Умножим системы (2.34) и (2.35) на $e^{-i\pi n x_s}$ и просуммируем по s от $-N$ до N. Используя (2.40) и (2.41), получим

$$\widehat{f}_{nm}+\widehat{f}_{(-n)m}+\widehat{f}_{n(-m)}+\widehat{f}_{(-n)(-m)} =$$
$$= 4\sum_{s=0}^{M_2}\sum_{k=0}^{M_2}\Delta^d_{2k+1,2s+1}\widehat{B}_{2k+1,n}\widehat{B}_{2s+1,m},\ |n|,|m| = O(N) \le N,\ \ N\to\infty, \tag{2.42}$$

$$\widehat{f}_{nm}+\widehat{f}_{(-n)m}-\widehat{f}_{n(-m)}-\widehat{f}_{(-n)(-m)} =$$
$$= 4\sum_{s=0}^{M_1}\sum_{k=0}^{M_2}\Delta^d_{2k+1,2s}\widehat{B}_{2k+1,n}\widehat{B}_{2s,m},\ |n|,|m| = O(N) \le N,\ \ N\to\infty, \tag{2.43}$$

$$
\begin{aligned}
&\widehat{f}_{nm} - \widehat{f}_{(-n)m} + \widehat{f}_{n(-m)} - \widehat{f}_{(-n)(-m)} = \\
&\quad = 4\sum_{s=0}^{M_2}\sum_{k=0}^{M_1} \Delta^d_{2k,2s+1}\widehat{B}_{2k,n}\widehat{B}_{2s+1,m},\ |n|,|m| = O(N) \le N,\ N\to\infty,
\end{aligned} \tag{2.44}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widehat{f}_{nm} - \widehat{f}_{(-n)m} - \widehat{f}_{n(-m)} + \widehat{f}_{(-n)(-m)} = \\
&\quad = 4\sum_{s=0}^{M_1}\sum_{k=0}^{M_1} \Delta^d_{2k,2s}\widehat{B}_{2k,n}\widehat{B}_{2s,m},\ |n|,|m| = O(N) \le N,\ N\to\infty.
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

В вычисленияхиспользуется это разложение. Представим некоторые численные результаты. В таблицах 5.1-5.8 представлены числа $\max\limits_{|s|\le N}|u_k(x_s) - u_k(x_s)^d|$ для функции (2.11), для различных значений N, M и k. Числа $u_k^d(x_s)$ вычислены из систем (2.34), (2.35) при $n = N$, $-N$, $N/2$, $-N/2$, $2N/3$, $-2N/3$ и так далее.

Результаты показывают, что точность приближения для $k = 0, 1$ очень быстро растет с увеличением M, и для данного примера, при $2N + 1 = 257$ имеем точность порядка $10^{-5} - 10^{-6}$, что на несколько порядков хуже результатов таблиц (3.1)-(3.3). Исключение сотавляет только число $\max\limits_{|s|\le N}|u_0(x_s) - u_0(x_s)^d|$ при $M = 6$. При $k = 5, 6, 7$ погрешность очень большая и, кроме того, сказываются ошибки накопления.

В таблицах 5.9-5.17 представлены относительные $\frac{|\Delta_{rr}-\Delta^d_{rr}|}{|\Delta_{rr}|}$ (в скобках) и абсолютные $|\Delta_{rr} - \Delta^d_{rr}|$ погрешности для различных значений N, M и r для примера (2.11). Приближенные значения получены из систем (2.42)-(2.45), где использованы значения $n = N$, $-N$, $N/2$, $-N/2$, $2N/3$, $-2N/3$ и так далее. Для больших M Δ_{00} и Δ_{11} вычисляются практически точно.

По уже известным приближенным значениям $\Delta^d_{k,s}$, $u_k^d(x_s)$ функции $u_k(y)$ восстанавливаются, согласно формуле (1.9)

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}_k^N(y) = \sum_{s=0}^{M}\Delta^d_{k,s}\left(B_s(y) - \sum_{m=-N}^{N}\widehat{B}_{s,m}e^{i\pi m y}\right) + \\
+ \sum_{m=-N}^{N}\widehat{u}^d_{k,m}e^{i\pi m y},\ k = 0, 1, \cdots, M.
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

Обозначим

$$\widehat{LA_k} = \sqrt{\int_{-1}^{1} |u_k(y) - \widehat{u}_k^N(y)|^2 dy},$$

$$\widehat{LR_k} = \frac{\sqrt{\int_{-1}^{1} |u_k(y) - \widehat{u}_k^N(y)|^2 dy}}{\sqrt{\int_{-1}^{1} |u_k(y)|^2 dy}}.$$

В таблицах 5.17-5.24 представлены числа $\widehat{LA_k}$ (в скобках) и $\widehat{LR_k}$ для примера (2.11), для различных значений M, N и k. Эксперименты показывают, что функции $u_k(y)$ $k = 0, 1, 2$ восстанавливаются со средней ошибкой порядка $10^{-6} - 10^{-9}$ при $M = 4$ и $2N + 1 = 129$. Аналогичные оценки получаются для равномерных погрешностей. Здесь также с увеличением k, $\widehat{LR_k}$ ошибка остаетя порядка $10^{-2} - 10^{-3}$, несмотря на указанное накопление ошибок.

Для восстанавления функции $v_k(x)$ получается формула, аналогичная (2.46)

$$\begin{aligned} \widehat{v}_s^N(x) = \sum_{k=0}^{M} \Delta_{k,s}^d \left(B_k(x) - \sum_{n=-N}^{N} \widehat{B}_{k,n} e^{i\pi n x} \right) + \\ + \sum_{n=-N}^{N} \widehat{v}_{k,n}^d e^{i\pi n x}, \ s = 0, 1, \cdots, M. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Для получения чисел $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(f^{(k,0)}(1,t) - f^{(k,0)}(-1,t))dt$ $k = 0, \cdots, M$ и $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(f^{(0,s)}(t,1) - f^{(0,s)}(t,-1))dt$ $s = 0, \cdots, M$ надо просто проинтегрировать (2.46) и (2.47), по x и y соответственно, от -1 до 1

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(f^{(k,0)}(1,t) - f^{(k,0)}(-1,t) \right) dt \sim \widehat{u}_{k,0}^d - \sum_{s=0}^{M} \Delta_{k,s}^d \widehat{B}_{s,0}, \ k = 0, \cdots, M. \tag{2.48}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(f^{(0,s)}(t,1) - f^{(0,s)}(t,-1) \right) dt \sim \widehat{v}_{s,0}^d - \sum_{k=0}^{M} \Delta_{k,s}^d \widehat{B}_{k,0}, \ s = 0, \cdots, M. \tag{2.49}$$

Теперь для восстанавления функции $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x,t)dt$, $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t,y)dt$ достаточно применить формулы (1.9), (2.48), (2.49)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x,t)dt \sim \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M}\int_{-1}^{1}\Big(f^{(k,0)}(1,t)-f^{(k,0)}(-1,t)\Big)\,dt\times \\
\times\left(B_k(x)-\sum_{m=-N}^{N}\widehat{B}_{k,n}e^{i\pi nx}\right)+\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}_{n0}e^{-i\pi nx_k}.
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t,y)dt \sim \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{M}\int_{-1}^{1}\Big(f^{(0,s)}(t,1)-f^{(0,s)}(t,-1)\Big)\,dt\times \\
\times\left(B_s(y)-\sum_{m=-N}^{N}\widehat{B}_{s,m}e^{i\pi my}\right)+\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}\widehat{f}_{0m}e^{-i\pi mx_k}.
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

В таблицах 5.25-5.27 представлены равномерные погрешности применения формулы (2.32), где неизвестные функции вычислены согласно формулам (2.46), (2.47), (2.50), (2.51) в которых числа $\Delta_{k,s}$, $u_s(x_m)$, $v_k(x_m)$, $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(f^{(k,0)}(1,t)-f^{(k,0)}(-1,t))dt$, $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(f^{(0,s)}(t,1)-f^{(0,s)}(t,-1))dt$ получены из (2.34), (2.35), (2.37), (2.38), (5.42)-(2.45), (2.48), (2.49) при $n = N$, $-N$, $N/2$, $-N/2$, $2N/3$, $-2N/3$ и так далее, для различных значений $M = Q, Q+1, Q+2$ соответственно. С увеличением M точность конечно увеличивается, так как более точно восстанавливается функция $F(x,y)$.

Эти оценки в среднем $2-3$ раза уступают результатам таблиц (3.25)-(3.27).

3. Численные результаты

3.1

Q	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
0	$r_0^f=6\cdot10^{-2}$	$r_0^f=3\cdot10^{-2}$	$r_0^f=1\cdot10^{-2}$	$r_0^f=7\cdot10^{-3}$
2	$r_0^f=2\cdot10^{-4}$	$r_0^f=2\cdot10^{-5}$	$r_0^f=3\cdot10^{-6}$	$r_0^f=3\cdot10^{-7}$
	$r_2^f=1\cdot10^{-1}$	$r_2^f=6\cdot10^{-2}$	$r_2^f=3\cdot10^{-2}$	$r_2^f=1\cdot10^{-2}$
4	$r_0^f=9\cdot10^{-7}$	$r_0^f=2\cdot10^{-8}$	$r_0^f=8\cdot10^{-10}$	$r_0^f=2\cdot10^{-11}$
	$r_2^f=7\cdot10^{-4}$	$r_2^f=8\cdot10^{-5}$	$r_2^f=1\cdot10^{-5}$	$r_2^f=1\cdot10^{-6}$
	$r_4^f=9\cdot10^{-2}$	$r_4^f=4\cdot10^{-2}$	$r_4^f=2\cdot10^{-2}$	$r_4^f=1\cdot10^{-2}$
6	$r_0^f=3\cdot10^{-9}$	$r_0^f=2\cdot10^{-11}$	$r_0^f=2\cdot10^{-13}$	$r_0^f=2\cdot10^{-15}$
	$r_2^f=3\cdot10^{-6}$	$r_2^f=9\cdot10^{-8}$	$r_2^f=3\cdot10^{-9}$	$r_2^f=2\cdot10^{-10}$
	$r_4^f=9\cdot10^{-4}$	$r_4^f=1\cdot10^{-4}$	$r_4^f=1\cdot10^{-5}$	$r_4^f=4\cdot10^{-6}$

Таблица 1.1. Ошибки r_k^f для четных Q и k для различных значений N, где A_k^f вычислены из системы (1.7) при $n=-N, N, N/2,\ -N/2,\ 2N/3,\ -2N/3, \cdots$ $f(x)=\sin(x-1)$.

Q	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
0	$r_0^f=1\cdot10^{-3}$	$r_0^f=4\cdot10^{-4}$	$r_0^f=9\cdot10^{-5}$	$r_0^f=2\cdot10^{-5}$
2	$r_0^f=9\cdot10^{-6}$	$r_0^f=6\cdot10^{-7}$	$r_0^f=3\cdot10^{-8}$	$r_0^f=2\cdot10^{-9}$
	$r_2^f=7\cdot10^{-3}$	$r_2^f=2\cdot10^{-3}$	$r_2^f=4\cdot10^{-4}$	$r_2^f=1\cdot10^{-4}$
4	$r_0^f=4\cdot10^{-8}$	$r_0^f=5\cdot10^{-10}$	$r_0^f=8\cdot10^{-12}$	$r_0^f=1\cdot10^{-13}$
	$r_2^f=4\cdot10^{-5}$	$r_2^f=2\cdot10^{-6}$	$r_2^f=1\cdot10^{-7}$	$r_2^f=8\cdot10^{-9}$
	$r_4^f=1\cdot10^{-2}$	$r_4^f=2\cdot10^{-3}$	$r_4^f=6\cdot10^{-4}$	$r_4^f=2\cdot10^{-4}$
6	$r_0^f=1\cdot10^{-10}$	$r_0^f=3\cdot10^{-13}$	$r_0^f=4\cdot10^{-15}$	$r_0^f=2\cdot10^{-15}$
	$r_2^f=1\cdot10^{-7}$	$r_2^f=2\cdot10^{-9}$	$r_2^f=4\cdot10^{-11}$	$r_2^f=1\cdot10^{-11}$
	$r_4^f=7\cdot10^{-5}$	$r_4^f=4\cdot10^{-6}$	$r_4^f=3\cdot10^{-7}$	$r_4^f=5\cdot10^{-7}$

Таблица 1.2. Ошибки r_k^f для четных Q и k для различных значений N, где A_k^f вычислены из систем (1.11), (1.12) при $n=-N, N, N/2,\ -N/2,\ 2N/3,$ $-2N/3, \cdots$. $f(x)=\sin(x-1)$.

Q	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
0	$r_0^d=8\cdot10^{-3}$	$r_0^d=2\cdot10^{-3}$	$r_0^d=5\cdot10^{-4}$	$r_0^d=1\cdot10^{-4}$
2	$r_0^d=2\cdot10^{-4}$	$r_0^d=2\cdot10^{-5}$	$r_0^d=3\cdot10^{-6}$	$r_0^d=3\cdot10^{-7}$
	$r_2^d=9\cdot10^{-2}$	$r_2^d=4\cdot10^{-2}$	$r_2^d=2\cdot10^{-2}$	$r_2^d=1\cdot10^{-2}$
4	$r_0^d=7\cdot10^{-7}$	$r_0^d=2\cdot10^{-8}$	$r_0^d=7\cdot10^{-10}$	$r_0^d=5\cdot10^{-12}$
	$r_2^d=5\cdot10^{-4}$	$r_2^d=5\cdot10^{-5}$	$r_2^d=7\cdot10^{-6}$	$r_2^d=2\cdot10^{-7}$
	$r_4^d=6\cdot10^{-2}$	$r_4^d=2\cdot10^{-2}$	$r_4^d=1\cdot10^{-2}$	$r_4^d=1\cdot10^{-3}$
6	$r_0^d=2\cdot10^{-9}$	$r_0^d=2\cdot10^{-11}$	$r_0^d=1\cdot10^{-11}$	$r_0^d=1\cdot10^{-10}$
	$r_2^d=2\cdot10^{-6}$	$r_2^d=6\cdot10^{-8}$	$r_2^d=1\cdot10^{-7}$	$r_2^d=6\cdot10^{-6}$
	$r_4^d=5\cdot10^{-4}$	$r_4^d=7\cdot10^{-5}$	$r_4^d=5\cdot10^{-4}$	$r_4^d=1\cdot10^{-1}$

Таблица 1.3.Ошибки r_k^d для четных Q и k для различных значений N, где A_k^d вычислены из системы (1.10) при $n=-N,N,N/2,-N/2,2N/3,-2N/3,\cdots$ $f(x)=\sin(x-1)$.

Q	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
0	$r_0^d=2\cdot10^{-3}$	$r_0^d=4\cdot10^{-4}$	$r_0^d=1\cdot10^{-4}$	$r_0^d=3\cdot10^{-5}$
2	$r_0^d=1\cdot10^{-5}$	$r_0^d=7\cdot10^{-7}$	$r_0^d=4\cdot10^{-8}$	$r_0^d=3\cdot10^{-9}$
	$r_2^d=7\cdot10^{-3}$	$r_2^d=2\cdot10^{-3}$	$r_2^d=5\cdot10^{-4}$	$r_2^d=1\cdot10^{-4}$
4	$r_0^d=5\cdot10^{-8}$	$r_0^d=7\cdot10^{-10}$	$r_0^d=1\cdot10^{-11}$	$r_0^d=3\cdot10^{-13}$
	$r_2^d=4\cdot10^{-5}$	$r_2^d=2\cdot10^{-6}$	$r_2^d=2\cdot10^{-7}$	$r_2^d=2\cdot10^{-8}$
	$r_4^d=1\cdot10^{-2}$	$r_4^d=3\cdot10^{-3}$	$r_4^d=7\cdot10^{-4}$	$r_4^d=2\cdot10^{-4}$
6	$r_0^d=2\cdot10^{-10}$	$r_0^d=4\cdot10^{-13}$	$r_0^d=3\cdot10^{-13}$	$r_0^d=2\cdot10^{-12}$
	$r_2^d=2\cdot10^{-7}$	$r_2^d=2\cdot10^{-9}$	$r_2^d=4\cdot10^{-9}$	$r_2^d=1\cdot10^{-7}$
	$r_4^d=8\cdot10^{-5}$	$r_4^d=4\cdot10^{-6}$	$r_4^d=2\cdot10^{-5}$	$r_4^d=2\cdot10^{-3}$

Таблица 1.4.Ошибки r_k^d для четных Q и k для различных значений N, где A_k^d вычислены из систем (1.13), (1.14) при $n=-N,N,N/2,$ $-N/2,$ $2N/3,$ $-2N/3,\cdots$ $f(x)=\sin(x-1)$.

Q	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
0	$3\cdot10^{-2}$	$1.5\cdot10^{-2}$	$8\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-3}$
2	$8\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-7}$
4	$5\cdot10^{-7}$	$1\cdot10^{-8}$	$4\cdot10^{-10}$	$1\cdot10^{-11}$
6	$1\cdot10^{-9}$	$3\cdot10^{-11}$	$8\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-15}$

Таблица 1.5. Равномерные ошибки применения формулы (1.6), для функции $\sin(x-1)$, где вместо чисел A_k подставлены числа A_k^f из системы (1.7), при $n=-N,N,N/2,$ $-N/2,$ $2N/3,$ $-2N/3,\cdots$.

Q	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
0	$2\cdot10^{-2}$	$8\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-3}$
2	$2\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-7}$	$3\cdot10^{-8}$
4	$1\cdot10^{-7}$	$3\cdot10^{-9}$	$1\cdot10^{-10}$	$3\cdot10^{-12}$
6	$5\cdot10^{-10}$	$2\cdot10^{-12}$	$2\cdot10^{-14}$	$2\cdot10^{-15}$

Таблица 1.6. Равномерные ошибки применения формулы (1.6), для функции $\sin(x-1)$, где вместо чисел A_k подставлены числа A_k^f из систем (1.11), (1.12), при $n=-N,N,N/2,-N/2,2N/3,\ -2N/3,\cdots$.

Q	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
0	$2\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-2}$	$7\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-3}$
2	$1\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-7}$
4	$6\cdot10^{-7}$	$2\cdot10^{-8}$	$6\cdot10^{-10}$	$2\cdot10^{-11}$
6	$2\cdot10^{-9}$	$2\cdot10^{-11}$	$5\cdot10^{-12}$	$6\cdot10^{-11}$

Таблица 1.7. Равномерные ошибки применения формулы (1.19), для функции $\sin(x-1)$, где вместо чисел A_k подставлены числа A_k^d из системы (1.10), при $n=-N,N,N/2,-N/2,2N/3,\ -2N/3,\cdots$.

Q	$N=8$	$N=16$	$N=32$	$N=64$
0	$2\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-2}$	$7\cdot10^{-3}$	$3\cdot10^{-3}$
2	$6\cdot10^{-5}$	$8\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-7}$
4	$5\cdot10^{-7}$	$1\cdot10^{-8}$	$5\cdot10^{-10}$	$2\cdot10^{-11}$
6	$2\cdot10^{-9}$	$1\cdot10^{-11}$	$2\cdot10^{-12}$	$2\cdot10^{-11}$

Таблица 1.8. Равномерные ошибки формулы (1.9), для функции $\sin(x-1)$, где вместо чисел A_k подставлены числа A_k из систем (1.13), (1.14), при $n=-N,N,N/2,-N/2,2N/3,\ -2N/3,\cdots$.

3.2

Q	$N=8$	$N=16$	$N=33$
0	$1\cdot10^{-1}$	$6\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-4}$
1	$2\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-5}$
2	$4\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-5}$	$8\cdot10^{-6}$
3	$3\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-8}$
4	$4\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-7}$	$1\cdot10^{-8}$
5	$4\cdot10^{-7}$	$1\cdot10^{-8}$	$7\cdot10^{-9}$
6	$8\cdot10^{-8}$	$8\cdot10^{-9}$	$----$

Таблица 2.1. Равномерные погрешности применения формулы (2.10) (пример (2.11)) при различных значениях Q и N.

3.3

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=0$	$4\cdot10^{-2}$	$9\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-4}$
$M=2$	$8\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-7}$
$M=4$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-7}$	$4\cdot10^{-9}$	$6\cdot10^{-7}$
$M=6$	$9\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-7}$	$7\cdot10^{-9}$	$6\cdot10^{-9}$	$6\cdot10^{-9}$

Таблица 3.1. Ошибка $\max\limits_{-N\le m\le N}|u_{0,m}-u^f_{0,m}|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=1$	$1\cdot10^{-1}$	$4\cdot10^{-2}$	$9\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-3}$	$6\cdot10^{-4}$
$M=3$	$3\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-4}$	$7\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-7}$
$M=5$	$4\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-7}$	$2\cdot10^{-8}$	$2\cdot10^{-8}$
$M=7$	$4\cdot10^{-4}$	$9\cdot10^{-7}$	$3\cdot10^{-8}$	$2\cdot10^{-8}$	$2\cdot10^{-8}$

Таблица 3.2. Ошибка $\max\limits_{-N\le m\le N}|u_{1,m}-u^f_{1,m}|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=2$	6	1	$3\cdot10^{-1}$	$8\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-2}$
$M=4$	1	$4\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-5}$
$M=6$	$1\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-7}$	$2\cdot10^{-7}$

Таблица 3.3. Ошибка $\max\limits_{-N\le m\le N}|u_{2,m}-u^f_{2,m}|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=3$	26	5	1	$3\cdot10^{-1}$	$8\cdot10^{-2}$
$M=5$	4	$2\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-2}$	$7\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-5}$
$M=7$	$5\cdot10^{-1}$	$5\cdot10^{-3}$	$8\cdot10^{-5}$	$9\cdot10^{-7}$	$7\cdot10^{-7}$

Таблица 3.4. Ошибка $\max\limits_{-N\le m\le N}|u_{3,m}-u^f_{3,m}|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=4$	276	53	13	3	$8\cdot10^{-1}$
$M=6$	56	2	$1\cdot10^{-1}$	$8\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-4}$

Таблица 3.5. Ошибка $\max\limits_{-N\le m\le N}|u_{4,m}-u^f_{4,m}|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=5$	1167	224	55	13	3
$M=7$	235	10	$6 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3.6. Ошибка $\max\limits_{-N \le m \le N} |u_{5,m} - u^f_{5,m}|$ для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=6$	9959	1879	457	112	29

Таблица 3.7. Ошибка $\max\limits_{-N \le m \le N} |u_{6,m} - u^f_{6,m}|$ для $M=6$ и различных значений N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=7$	42052	7936	1932	472	103

Таблица 3.8. Ошибка $\max\limits_{-N \le m \le N} |u_{7,m} - u^f_{7,m}|$ для $M=7$ и различных значений N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=0$	$1 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$
	$(5 \cdot 10^{-2})$	$(1 \cdot 10^{-2})$	$(3 \cdot 10^{-3})$	$(8 \cdot 10^{-4})$	$(2 \cdot 10^{-4})$
$M=2$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$
	$(1 \cdot 10^{-2})$	$(5 \cdot 10^{-4})$	$(3 \cdot 10^{-5})$	$(2 \cdot 10^{-6})$	$(1 \cdot 10^{-7})$
$M=4$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$
	$(1 \cdot 10^{-3})$	$(1 \cdot 10^{-5})$	$(2 \cdot 10^{-7})$	$(5 \cdot 10^{-9})$	$(8 \cdot 10^{-9})$
$M=6$	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$
	$(1 \cdot 10^{-4})$	$(3 \cdot 10^{-7})$	$(9 \cdot 10^{-9})$	$(8 \cdot 10^{-9})$	$(8 \cdot 10^{-9})$

Таблица 3.9. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{00} при различных значениях M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=1$	1.5	$4\cdot10^{-1}$	$9\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-2}$	$6\cdot10^{-3}$
	$(5\cdot10^{-2})$	$(1\cdot10^{-2})$	$(3\cdot10^{-3})$	$(8\cdot10^{-4})$	$(2\cdot10^{-4})$
$M=3$	$3\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-2}$	$9\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-6}$
	$(1\cdot10^{-2})$	$(5\cdot10^{-4})$	$(3\cdot10^{-5})$	$(2\cdot10^{-6})$	$(1\cdot10^{-7})$
$M=5$	$4\cdot10^{-2}$	$4\cdot10^{-4}$	$6\cdot10^{-6}$	$1\cdot10^{-7}$	$2\cdot10^{-7}$
	$(1\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-5})$	$(2\cdot10^{-7})$	$(5\cdot10^{-9})$	$(8\cdot10^{-9})$
$M=7$	$3\cdot10^{-3}$	$7\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-7}$	$2\cdot10^{-7}$	$2\cdot10^{-7}$
	$(1\cdot10^{-4})$	$(3\cdot10^{-7})$	$(9\cdot10^{-9})$	$(8\cdot10^{-9})$	$(8\cdot10^{-9})$

Таблица 3.10. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{11} при различных значениях M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=2$	107	23	5	1	$3\cdot10^{-1}$
	$(3\cdot10^{-1})$	$(7\cdot10^{-2})$	$(2\cdot10^{-2})$	$(4\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-3})$
$M=4$	16	$7\cdot10^{-1}$	$4\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-4}$
	$(5\cdot10^{-2})$	$(2\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-4})$	$(7\cdot10^{-6})$	$(4\cdot10^{-7})$
$M=6$	2	$2\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-5}$	$1\cdot10^{-3}$
	$(5\cdot10^{-3})$	$(5\cdot10^{-5})$	$(8\cdot10^{-7})$	$(9\cdot10^{-8})$	$(3\cdot10^{-6})$

Таблица 3.11. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{22} при различных значениях M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=3$	1254	266	64	16	4
	$(3\cdot10^{-1})$	$(7\cdot10^{-2})$	$(2\cdot10^{-2})$	$(4\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-3})$
$M=5$	184	8	$5\cdot10^{-1}$	$4\cdot10^{-4}$	3
	$(5\cdot10^{-2})$	$(2\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-4})$	$(1\cdot10^{-7})$	$(8\cdot10^{-4})$
$M=7$	21	$2\cdot10^{-1}$	$5\cdot10^{-3}$	3	57
	$(5\cdot10^{-3})$	$(5\cdot10^{-5})$	$(1\cdot10^{-6})$	$(8\cdot10^{-4})$	$(1\cdot10^{-2})$

Таблица 3.12. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{33} при различных значениях M и N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=4$	23671	4466	1096	83	106865
	$(5 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	$(2 \cdot 10^{-3})$	(2)
$M=6$	4054	164	679	22924	$1 \cdot 10^{7}$
	$(9 \cdot 10^{-2})$	$(4 \cdot 10^{-3})$	$(1 \cdot 10^{-2})$	$(5 \cdot 10^{-1})$	(317)

Таблица 3.13. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{44} при различных значениях M и N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=5$	276007	52072	12834	$2 \cdot 10^{6}$	$2 \cdot 10^{9}$
	$(5 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	(4)	(4230)
$M=7$	47270	3469	30049	$1 \cdot 10^{9}$	$2 \cdot 10^{11}$
	$(9 \cdot 10^{-2})$	$(6 \cdot 10^{-3})$	$(6 \cdot 10^{-2})$	(2440)	(439243)

Таблица 3.14. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{55} при различных значениях M и N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=6$	$4 \cdot 10^{6}$	922343	10^{8}	10^{12}	10^{15}
	$(7 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	(157)	(969534)	(10^{8})

Таблица 3.15. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{66} при различных $M=6$ и различных значений N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=7$	10^{7}	10^{8}	10^{11}	10^{16}	10^{19}
	$(7 \cdot 10^{-1})$	(2)	(1717)	(10^{8})	(10^{12})

Таблица 3.16. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{77} при $M=7$ и различных значениях N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=0$	$8\cdot 10^{-2}$	$2\cdot 10^{-2}$	$5\cdot 10^{-3}$	$1\cdot 10^{-3}$	$3\cdot 10^{-4}$
	$(5\cdot 10^{-2})$	$(1\cdot 10^{-2})$	$(2\cdot 10^{-3})$	$(7\cdot 10^{-4})$	$(2\cdot 10^{-4})$
$M=2$	$2\cdot 10^{-2}$	$1\cdot 10^{-3}$	$5\cdot 10^{-5}$	$3\cdot 10^{-6}$	$2\cdot 10^{-7}$
	$(1\cdot 10^{-2})$	$(5\cdot 10^{-4})$	$(3\cdot 10^{-5})$	$(2\cdot 10^{-6})$	$(1\cdot 10^{-7})$
$M=4$	$2\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^{-5}$	$3\cdot 10^{-7}$	$1\cdot 10^{-8}$	$1\cdot 10^{-8}$
	$(1\cdot 10^{-3})$	$(1\cdot 10^{-5})$	$(2\cdot 10^{-7})$	$(5\cdot 10^{-9})$	$(8\cdot 10^{-9})$
$M=6$	$2\cdot 10^{-4}$	$5\cdot 10^{-7}$	$2\cdot 10^{-8}$	$1\cdot 10^{-8}$	$1\cdot 10^{-8}$
	$(1\cdot 10^{-4})$	$(3\cdot 10^{-7})$	$(9\cdot 10^{-9})$	$(8\cdot 10^{-9})$	$(8\cdot 10^{-9})$

Таблица 3.17. числа LA_0 (в скобках) и LR_0 (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=1$	$4\cdot 10^{-1}$	$9\cdot 10^{-2}$	$2\cdot 10^{-2}$	$6\cdot 10^{-3}$	$1\cdot 10^{-3}$
	$(5\cdot 10^{-2})$	$(1\cdot 10^{-2})$	$(3\cdot 10^{-3})$	$(7\cdot 10^{-4})$	$(2\cdot 10^{-4})$
$M=3$	$8\cdot 10^{-2}$	$4\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^{-4}$	$1\cdot 10^{-5}$	$1\cdot 10^{-6}$
	$(1\cdot 10^{-2})$	$(5\cdot 10^{-4})$	$(3\cdot 10^{-5})$	$(2\cdot 10^{-6})$	$(1\cdot 10^{-7})$
$M=5$	$1\cdot 10^{-2}$	$1\cdot 10^{-4}$	$2\cdot 10^{-6}$	$5\cdot 10^{-8}$	$6\cdot 10^{-8}$
	$(1\cdot 10^{-3})$	$(1\cdot 10^{-5})$	$(2\cdot 10^{-7})$	$(6\cdot 10^{-9})$	$(7\cdot 10^{-9})$
$M=7$	$1\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^{-6}$	$7\cdot 10^{-8}$	$6\cdot 10^{-8}$	$6\cdot 10^{-8}$
	$(1\cdot 10^{-4})$	$(3\cdot 10^{-7})$	$(8\cdot 10^{-9})$	$(7\cdot 10^{-9})$	$(7\cdot 10^{-9})$

Таблица 3.18. числа LA_1 (в скобках) и LR_1 (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=2$	14	3	$7\cdot 10^{-1}$	$2\cdot 10^{-1}$	$4\cdot 10^{-2}$
	$(3\cdot 10^{-1})$	$(6\cdot 10^{-2})$	$(1\cdot 10^{-2})$	$(3\cdot 10^{-3})$	$(9\cdot 10^{-4})$
$M=4$	2	$1\cdot 10^{-1}$	$6\cdot 10^{-3}$	$4\cdot 10^{-4}$	$2\cdot 10^{-5}$
	$(5\cdot 10^{-2})$	$(2\cdot 10^{-3})$	$(1\cdot 10^{-4})$	$(7\cdot 10^{-6})$	$(5\cdot 10^{-7})$
$M=6$	$3\cdot 10^{-1}$	$2\cdot 10^{-3}$	$4\cdot 10^{-5}$	$3\cdot 10^{-7}$	$4\cdot 10^{-7}$
	$(5\cdot 10^{-3})$	$(5\cdot 10^{-5})$	$(8\cdot 10^{-7})$	$(6\cdot 10^{-9})$	$(8\cdot 10^{-9})$

Таблица 3.19. числа LA_2 (в скобках) и LR_2 (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=3$	63	13	3	$8\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-1}$
	$(3\cdot10^{-1})$	$(6\cdot10^{-2})$	$(1\cdot10^{-2})$	$(3\cdot10^{-3})$	$(9\cdot10^{-4})$
$M=5$	11	$4\cdot10^{-1}$	$3\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-4}$
	$(5\cdot10^{-2})$	$(2\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-4})$	$(7\cdot10^{-6})$	$(5\cdot10^{-7})$
$M=7$	1	$1\cdot10^{-2}$	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-6}$	$2\cdot10^{-6}$
	$(5\cdot10^{-3})$	$(5\cdot10^{-5})$	$(8\cdot10^{-7})$	$(8\cdot10^{-9})$	$(7\cdot10^{-9})$

Таблица 3.20. числа LA_3 (в скобках) и LR_3 (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=4$	612	117	29	7	2
	$(4\cdot10^{-1})$	$(8\cdot10^{-2})$	$(2\cdot10^{-2})$	$(5\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-3})$
$M=6$	123	5	$3\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-3}$
	$(9\cdot10^{-2})$	$(3\cdot10^{-3})$	$(2\cdot10^{-4})$	$(1\cdot10^{-4})$	$(9\cdot10^{-7})$

Таблица 3.21. числа LA_4 (в скобках) и LR_4 (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=5$	2816	540	133	32	8
	$(4\cdot10^{-1})$	$(8\cdot10^{-2})$	$(2\cdot10^{-2})$	$(5\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-3})$
$M=7$	567	24	1	$9\cdot10^{-2}$	$7\cdot10^{-3}$
	$(9\cdot10^{-2})$	$(4\cdot10^{-3})$	$(2\cdot10^{-4})$	$(1\cdot10^{-5})$	$(1\cdot10^{-6})$

Таблица 3.22. числа LA_5 (в скобках) LR_5 (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=6$	22066	4164	1014	247	64
	$(5\cdot10^{-1})$	$(1\cdot10^{-1})$	$(2\cdot10^{-2})$	$(6\cdot10^{-3})$	$(1\cdot10^{-3})$

Таблица 3.23. числа LA_6 (в скобках) и LR_6 (пример (2.11)), для $M=6$ и различных значений N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=7$	101436	19142	4659	1136	242
	$(5 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	$(6 \cdot 10^{-3})$	$(1 \cdot 10^{-3})$

Таблица 3.24. числа LA_7 (в скобках) и LR_7 (пример (2.11)), для $M=7$ и различных значений N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65
$Q=0$	$1 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
$Q=1$	$4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$
$Q=2$	$8 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
$Q=3$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$
$Q=4$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-7}$
$Q=5$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$

Таблица 3.25. Равномерные погрешности применения формулы (2.10) (пример (2.11)) при различных значениях M и N, когда функция $F(x,y)$ восстановлена по формулам (2.26)- (2.29), а числа $\Delta_{k,s}$, $u_{s,m}$ и $v_{k,n}$ полу чены из систем (2.15), (2.16), (2.18), (2.19), (2.22)-(2.25) при $n=N$, $-N$, $2N/3$, $-2N/3$... и $M=Q$.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65
$Q=0$	$1 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
$Q=1$	$8 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
$Q=2$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$
$Q=3$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-7}$
$Q=4$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$
$Q=5$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-9}$

Таблица 3.26. Равномерные погрешности применения формулы (2.10) (пример (2.11)) при различных значениях M и N, когда функция $F(x,y)$ восстановлена по формулам (2.26)- (2.29), а числа $\Delta_{k,s}$, $u_{s,m}$ и $v_{k,n}$ полу чены из систем (2.15), (2.16), (2.18), (2.19), (2.22)-(2.25) при $n=N$, $-N$, $2N/3$, $-2N/3$... и $M=Q+1$.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65
$Q=0$	$1 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
$Q=1$	$4 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$Q=2$	$1 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-6}$
$Q=3$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$
$Q=4$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$
$Q=5$	$8 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-9}$

Таблица 3.27. Равномерные погрешности применения формулы (2.10) (пример (2.11)) при различных значениях M и N, когда функция $F(x,y)$ восстановлена по формулам (2.26)- (2.29), а числа $\Delta_{k,s}$, $u_{s,m}$ и $v_{k,n}$ полу чены из систем (2.15), (2.16), (2.18), (2.19), (2.22)-(2.25) при $n=N$, $-N$, $2N/3$, $-2N/3$... и $M=Q+2$.

3.4

Q	$N=8$	$N=16$	$N=33$
0	$1 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$
1	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
2	$7 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$
3	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-8}$
4	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-8}$
5	$4 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-9}$	$6 \cdot 10^{-11}$
6	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-11}$
7	$1 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$8 \cdot 10^{-14}$
8	$2 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-12}$	$6 \cdot 10^{-14}$
9	$1 \cdot 10^{-10}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-13}$

Таблица 4.1. Равномерные погрешности применения формулы (2.32) (пример (2.11)) при различных значениях Q и N.

3.5

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=0$	$8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
$M=2$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-7}$
$M=4$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-10}$
$M=6$	$3 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-12}$

Таблица 5.1 Ошибка $\max\limits_{|s| \leq N} |u_0(x_s) - u_0(x_s)^d|$ для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=1$	$8\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-1}$	$5\cdot10^{-2}$	$1\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-3}$
$M=3$	$2\cdot10^{-1}$	$1\cdot10^{-2}$	$6\cdot10^{-4}$	$4\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-6}$
$M=5$	$3\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-4}$	$5\cdot10^{-6}$	$8\cdot10^{-8}$	$5\cdot10^{-9}$
$M=7$	$4\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-5}$	$4\cdot10^{-8}$	$5\cdot10^{-9}$	$2\cdot10^{-8}$

Таблица 5.2 Ошибка $\max\limits_{|s|\le N} |u_1(x_s) - u_1(x_s)^d|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=2$	13	3	$7\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-1}$	$4\cdot10^{-2}$
$M=4$	2	$1\cdot10^{-1}$	$7\cdot10^{-3}$	$4\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-5}$
$M=6$	$3\cdot10^{-1}$	$4\cdot10^{-3}$	$6\cdot10^{-5}$	$9\cdot10^{-7}$	$4\cdot10^{-7}$

Таблица 5.3. Ошибка $\max\limits_{|s|\le N} |u_2(x_s) - u_2(x_s)^d|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=3$	80	17	4	1	$3\cdot10^{-1}$
$M=5$	17	$7\cdot10^{-1}$	$5\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-3}$	$5\cdot10^{-4}$
$M=7$	3	$3\cdot10^{-2}$	$4\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-3}$

Таблица 5.4. Ошибка $\max\limits_{|s|\le N} |u_3(x_s) - u_3(x_s)^d|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=4$	600	117	29	7	2
$M=6$	136	6	$4\cdot10^{-1}$	$2\cdot10^{-2}$	$3\cdot10^{-2}$

Таблица 5.5. Ошибка $\max\limits_{|s|\le N} |u_4(x_s) - u_4(x_s)^d|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=5$	3520	688	169	41	17
$M=7$	880	38	2	2	137

Таблица 5.6. Ошибка $\max\limits_{|s|\le N} |u_5(x_s) - u_5(x_s)^d|$
для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=6$	22073	4227	1029	254	631

Таблица 5.7. Ошибка $\max\limits_{|s|\le N} |u_6(x_s) - u_6(x_s)^d|$
для $M=6$ и различных значений N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=7$	127326	24288	5904	11000	10^6

Таблица 5.8. Ошибка $\max\limits_{|s|\le N} |u_7(x_s) - u_7(x_s)^d|$
для $M=7$ и для различных значений N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=0$	$1\cdot 10^{-1}$	$4\cdot 10^{-2}$	$1\cdot 10^{-2}$	$2\cdot 10^{-3}$	$6\cdot 10^{-4}$
	$(6\cdot 10^{-2})$	$(1\cdot 10^{-2})$	$(4\cdot 10^{-3})$	$(1\cdot 10^{-3})$	$(2\cdot 10^{-4})$
$M=2$	$3\cdot 10^{-2}$	$2\cdot 10^{-3}$	$1\cdot 10^{-4}$	$6\cdot 10^{-6}$	$2\cdot 10^{-7}$
	$(1\cdot 10^{-2})$	$(7\cdot 10^{-4})$	$(4\cdot 10^{-5})$	$(3\cdot 10^{-6})$	$(2\cdot 10^{-7})$
$M=4$	$4\cdot 10^{-3}$	$5\cdot 10^{-5}$	$8\cdot 10^{-7}$	$1\cdot 10^{-8}$	$2\cdot 10^{-10}$
	$(2\cdot 10^{-3})$	$(2\cdot 10^{-5})$	$(3\cdot 10^{-7})$	$(5\cdot 10^{-9})$	$(8\cdot 10^{-11})$
$M=6$	$5\cdot 10^{-4}$	$1\cdot 10^{-6}$	$5\cdot 10^{-9}$	$1\cdot 10^{-11}$	$2\cdot 10^{-12}$
	$(2\cdot 10^{-4})$	$(5\cdot 10^{-7})$	$(2\cdot 10^{-9})$	$(6\cdot 10^{-12})$	$(9\cdot 10^{-13})$

Таблица 5.9. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{00} при различных значениях M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=1$	3	$7\cdot 10^{-1}$	$2\cdot 10^{-1}$	$5\cdot 10^{-2}$	$1\cdot 10^{-2}$
	$(1\cdot 10^{-1})$	$(2\cdot 10^{-2})$	$(6\cdot 10^{-3})$	$(2\cdot 10^{-3})$	$(4\cdot 10^{-4})$
$M=3$	$6\cdot 10^{-1}$	$3\cdot 10^{-2}$	$2\cdot 10^{-3}$	$1\cdot 10^{-4}$	$8\cdot 10^{-6}$
	$(2\cdot 10^{-2})$	$(1\cdot 10^{-3})$	$(7\cdot 10^{-5})$	$(5\cdot 10^{-6})$	$(3\cdot 10^{-7})$
$M=5$	$1\cdot 10^{-1}$	$1\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^{-5}$	$1\cdot 10^{-6}$	$8\cdot 10^{-6}$
	$(3\cdot 10^{-3})$	$(4\cdot 10^{-5})$	$(6\cdot 10^{-7})$	$(5\cdot 10^{-8})$	$(3\cdot 10^{-7})$
$M=7$	$1\cdot 10^{-2}$	$3\cdot 10^{-5}$	$2\cdot 10^{-6}$	$5\cdot 10^{-6}$	$3\cdot 10^{-4}$
	$(4\cdot 10^{-4})$	$(1\cdot 10^{-6})$	$(8\cdot 10^{-8})$	$(2\cdot 10^{-6})$	$(1\cdot 10^{-5})$

Таблица 5.10. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{11} при различных значениях M и N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=2$	112	24	6	1	$4 \cdot 10^{-1}$
	$(3 \cdot 10^{-1})$	$(7 \cdot 10^{-2})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	$(4 \cdot 10^{-3})$	$(1 \cdot 10^{-3})$
$M=4$	18	$8 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
	$(5 \cdot 10^{-2})$	$(2 \cdot 10^{-3})$	$(1 \cdot 10^{-4})$	$(9 \cdot 10^{-6})$	$(9 \cdot 10^{-7})$
$M=6$	2	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-2}$
	$(7 \cdot 10^{-3})$	$(8 \cdot 10^{-5})$	$(2 \cdot 10^{-6})$	$(2 \cdot 10^{-6})$	$(2 \cdot 10^{-4})$

Таблица 5.11. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{22} при различных значениях M и N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=3$	1512	322	78	27	906
	$(4 \cdot 10^{-1})$	$(8 \cdot 10^{-2})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	$(7 \cdot 10^{-3})$	$(2 \cdot 10^{-1})$
$M=5$	277	12	1	554	55505
	$(7cdot10^{-2})$	$(3 \cdot 10^{-3})$	$(3 \cdot 10^{-4})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	(14)
$M=7$	42	1	159	50501	10^{6}
	$(1 \cdot 10^{-2})$	$(3 \cdot 10^{-4})$	$(4 \cdot 10^{-2})$	(13)	(1325)

Таблица 5.12. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{33} при различных значениях M и N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=4$	24914	4770	1171	294	125353
	$(5 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	$(6 \cdot 10^{-3})$	(3)
$M=6$	4775	214	921	59571	10^{8}
	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(5 \cdot 10^{-3})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	(1)	(6599)

Таблица 5.13. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{44} при различных значениях M и N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129	257
$M=5$	322825	64099	10^{6}	10^{10}	10^{13}
	$(6 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	(7)	(35546)	(10^{7})
$M=7$	68163	564959	10^{9}	10^{12}	10^{16}
	$(1 \cdot 10^{-1})$	(1)	(3217)	(10^{7})	$(10^{1}0)$

Таблица 5.14. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{55} при различных значениях M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=6$	10^6	401102	10^9	10^{13}	10^{16}
	$(7\cdot 10^{-1})$	$(6\cdot 10^{-2})$	(4)	(10^6)	(10^{10})

Таблица 5.15. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{66} при различных $M=6$ и различных значений N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129	257
$M=7$	10^7	10^{10}	10^{15}	10^{20}	10^{21}
	$(8\cdot 10^{-1})$	(640)	(10^7)	(10^{12})	(10^{16})

Таблица 5.16. Относительные (в скобках) и абсолютные значения погрешностей для Δ_{77} при $M=7$ и различных значениях N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129
$M=0$	$9\cdot 10^{-2}$	$2\cdot 10^{-2}$	$6\cdot 10^{-3}$	$1\cdot 10^{-3}$
	$(5\cdot 10^{-2})$	$(1\cdot 10^{-2})$	$(3\cdot 10^{-3})$	$(9\cdot 10^{-4})$
$M=2$	$2\cdot 10^{-2}$	$1\cdot 10^{-3}$	$7\cdot 10^{-5}$	$4\cdot 10^{-6}$
	$(1\cdot 10^{-2})$	$(6\cdot 10^{-4})$	$(4\cdot 10^{-5})$	$(2\cdot 10^{-6})$
$M=4$	$3\cdot 10^{-3}$	$3\cdot 10^{-5}$	$6\cdot 10^{-7}$	$8\cdot 10^{-9}$
	$(2\cdot 10^{-3})$	$(2\cdot 10^{-5})$	$(3\cdot 10^{-7})$	$(5\cdot 10^{-9})$
$M=6$	$3\cdot 10^{-4}$	$9\cdot 10^{-7}$	$4\cdot 10^{-9}$	$1\cdot 10^{-11}$
	$(2\cdot 10^{-4})$	$(5\cdot 10^{-7})$	$(2\cdot 10^{-9})$	$(8\cdot 10^{-12})$

Таблица 5.17. Ошибка $\widehat{LR_0}$ (в скобках) и $\widehat{LA_0}$ (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129
$M=1$	$7\cdot 10^{-1}$	$2\cdot 10^{-1}$	$4\cdot 10^{-2}$	$1\cdot 10^{-2}$
	$(9\cdot 10^{-2})$	$(2\cdot 10^{-2})$	$(5\cdot 10^{-3})$	$(1\cdot 10^{-3})$
$M=3$	$2\cdot 10^{-1}$	$1\cdot 10^{-2}$	$6\cdot 10^{-4}$	$4\cdot 10^{-5}$
	$(2\cdot 10^{-2})$	$(1\cdot 10^{-3})$	$(7\cdot 10^{-5})$	$(5\cdot 10^{-6})$
$M=5$	$3\cdot 10^{-2}$	$3\cdot 10^{-4}$	$5\cdot 10^{-6}$	$8\cdot 10^{-8}$
	$(3\cdot 10^{-3})$	$(4\cdot 10^{-5})$	$(6 cdot 10^{-7})$	$(9\cdot 10^{-9})$
$M=7$	$3\cdot 10^{-3}$	$9\cdot 10^{-6}$	$4\cdot 10^{-8}$	$6\cdot 10^{-9}$
	$(4\cdot 10^{-4})$	$(1\cdot 10^{-6})$	$(5\cdot 10^{-9})$	$(7\cdot 10^{-10})$

Таблица 5.18. Ошибка $\widehat{LR_1}$ (в скобках) и $\widehat{LA_1}$ (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129
$M=2$	14	3	$7 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$
	$(3 \cdot 10^{-1})$	$(6 \cdot 10^{-2})$	$(1 \cdot 10^{-2})$	$(4 \cdot 10^{-3})$
$M=4$	3	$1 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$
	$(5 \cdot 10^{-2})$	$(2 \cdot 10^{-3})$	$(1 \cdot 10^{-4})$	$(9 \cdot 10^{-6})$
$M=6$	$4 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$
	$(7 \cdot 10^{-3})$	$(8 \cdot 10^{-5})$	$(1 \cdot 10^{-6})$	$(2 \cdot 10^{-8})$

Таблица 5.19. Ошибка $\widehat{LR_2}$ (в скобках) и $\widehat{LA_2}$ (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129
$M=3$	75	16	4	1
	$(3 \cdot 10^{-1})$	$(7 \cdot 10^{-2})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	$(4 \cdot 10^{-3})$
$M=5$	16	$7 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$
	$(7 \cdot 10^{-2})$	$(3 \cdot 10^{-3})$	$(2 \cdot 10^{-4})$	$(1 \cdot 10^{-5})$
$M=7$	2	$3 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	$(1 \cdot 10^{-2})$	$(1 \cdot 10^{-4})$	$(2 \cdot 10^{-6})$	$(8 \cdot 10^{-7})$

Таблица 5.20. Ошибка $\widehat{LR_3}$ (в скобках) и $\widehat{LA_3}$ (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129
$M=4$	643	125	31	7
	$(4 \cdot 10^{-1})$	$(9 \cdot 10^{-2})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	$(5 \cdot 10^{-3})$
$M=6$	145	6	$4 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$
$(1 \cdot 10^{-1})$	$(4 \cdot 10^{-3})$	$(3 \cdot 10^{-4})$	$(2 \cdot 10^{-5})$	

Таблица 5.21. Ошибка $\widehat{LR_4}$ (в скобках) и $\widehat{LA_4}$ (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \to$	17	33	65	129
$M=5$	3275	638	157	38
	$(5 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(2 \cdot 10^{-2})$	$(6 \cdot 10^{-3})$
$M=7$	819	36	2	2
	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(5 \cdot 10^{-3})$	$(3 \cdot 10^{-4})$	$(4 \cdot 10^{-4})$

Таблица 5.22. Ошибка $\widehat{LR_5}$ (в скобках) и $\widehat{LA_5}$ (пример (2.11)), для различных значений M и N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129
$M=6$	23641	4516	1100	272
	$(6 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(3 \cdot 10^{-2})$	$(7 \cdot 10^{-3})$

Таблица 5.23. Ошибка $\widehat{LR_6}$ (в скобках) и $\widehat{LA_6}$ (пример (2.11)), для $M=6$ и различных значений N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65	129
$M=7$	118446	22516	5481	11390
	$(6 \cdot 10^{-1})$	$(1 \cdot 10^{-1})$	$(3 \cdot 10^{-2})$	$(6 \cdot 10^{-2})$

Таблица 5.24. Ошибка $\widehat{LR_7}$ (в скобках) и $\widehat{LA_7}$ (пример (2.11)), для $M=7$ и различных значений N.

$2N+1 \rightarrow$	17	33	65
$Q=0$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$
$Q=1$	$4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$
$Q=2$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$Q=3$	$1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$
$Q=4$	$3 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$
$Q=5$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$

Таблица 5.25. Равномерные погрешности применения формулы (4.3) (пример (2.11)) при различных значениях M и N, когда функция $F(x,y)$ восстановлена по формулам (2.46), (2.47), (2.50), (2.51), а числа $\Delta_{k,s}$, $u_{s,m}$ и $v_{k,n}$ получены из (2.34), (2.35), (2.37), (2.38), (2.42)-(2.45), (2.48), (2.49) при $n=N$, $-N$, $2N/3$, $-2N/3$... и $M=Q$.

$2N+1 \to$	17	33	65
$Q=0$	$2 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$
$Q=1$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$Q=2$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
$Q=3$	$3 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$
$Q=4$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$
$Q=5$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-8}$

Таблица 5.26. Равномерные погрешности применения формулы (4.3) (пример (2.11)) при различных значениях M и N, когда функция $F(x, y)$ восстановлена по формулам (2.46), (2.47), (2.50), (2.51), а числа $\Delta_{k,s}$, $u_{s,m}$ и $v_{k,n}$ получены из (2.34), (2.35), (2.37), (2.38), (2.42)-(2.45), (2.48), (2.49) при $n = N$, $-N$, $2N/3$, $-2N/3$... и $M = Q + 1$.

$2N+1 \to$	17	33	65
$Q=0$	$2 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$
$Q=1$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
$Q=2$	$4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$Q=3$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$
$Q=4$	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-8}$
$Q=5$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$---$

Таблица 5.27. Равномерные погрешности применения формулы (4.3) (пример (2.11)) при различных значениях M и N, когда функция $F(x, y)$ восстановлена по формулам (2.46), (2.47), (2.50), (2.51), а числа $\Delta_{k,s}$, $u_{s,m}$ и $v_{k,n}$ получены из (2.34), (2.35), (2.37), (2.38), (2.42)-(2.45), (2.48), (2.49) при $n = N$, $-N$, $2N/3$, $-2N/3$... и $M = Q + 2$.

Все численные результаты получены системой MATHEMATICA 3.0 [7].

4. Заключение

В работе [4] метод Бернулли в многомерном случае подвергается некоторому сомнению, в частности из за трудности восстанавления функции-скачков (см. (2.6)). Там же более приемлемым методом аппроксимации гладкой функции на квадрате считается метод, который использует разложение по полиномам Гегенбауера.

Наши исследования показывают, что метод Бернулли может с успехом применятся для решения многомерных аппроксимационных задач. Он дает более удовлетворительные результаты, чем метод Гегенбауера- и намного экономичнее, и менее требователен к компьютерным характеристикам. Для восстанавления функции с приемлемой точностью, здесь требуется значительно меньше коэффициентов Фурье или значении функции на равномерной сети. Эксперименты показывают также, что время затраченное на восстанавление функции-скачков ничтожно мало по сравнению с общими временными затратами. Результаты таблиц показывают, что для восстанавления нескольких первых скачков получаются достаточно эффективные алгоритмы для больших Q. Уже при малых N получаются практически точные значения.

Трудности метода Бернулли связаны с решением систем (1.7), (1.10), (2.14), (2.17), (2.21), (2.33), (2.36), (2.39). Для больших Q и N существенны ошибки накопления. Для избежание этих трудностей в одномерном случае в [2] предлагается вместо $Q \times Q$ системы решать $2Q \times Q$ переопределенную систему. Мы выбрали иной путь. Расщепление основных систем на самостоятельные системы и их решение при $n = N$, $-N$, $-N/2$, $N/2$, $2N/3$, $-2N/3$, $\cdots$, как предлагается в [4] для решения основных систем в одномерном случае, дали удовлетворительные результаты. Такое расщепление позволяет увеличивать точность определения некоторых скачков, что соответствующим образом увеличивает точность основных формул. Это позволяет также получать меньшее накопление ошибков, чем при прямом решении систем.

Здесь возможен применение любого другого метода нахождения скачков, которое дает хорошие результаты, например, использование дискретных схем в случае интерполяции.

Предложенную схему можно обобщить, если функция терпит разрыв внутри квадрата, как это делается в [2] в одномерном случае. Возможно также использование гибридной схемы Бернулли- Гегенбауер или расщепление основного квадрата на более мелкие, с последующим склеиванием, как это делается в [4] для одномерного случая. Это даст возможность использования параллельных методов, а также избежать накопления ошибков для больших N, так как ту же самую точность можно получить при более меньших N на каждой части квадрата.

В работе основное внимание уделено сравнительному анализу восстанавления функции по имеющимся значениям на равномерной сети с одной стороны и по коэффициентам Фурье с другой. Эксперименты показали, что второй метод более точен. Дла функции (2.11) в среднем 2-3 раза более точно восстанавливаются функции-скачки. Для более осциллирующих функции разница будет большей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Baszenski, F.J. Delvos, M. Tasche. A united approach to accelerating trigonometric expansions. Computers Math. Applic., Vol. 30, No 3-6, pp 33-49, 19995.

[2] K.S. Eckhoff and C.E. Wasberg. On the numerical approximation of derivatives by a modified Fourier collocation method, Thesis of Carl Erik Wasberg. Department of Mathematics. University of Bergen. Norway. 1996.

[3] K.S.Eckhoff. On a high order numerical method for solving partial differential equations in complex geometries. J. Scientific Comp. 12. 1997, pp 119-138.

[4] A. Gelb, D. Gottlieb. The resolution of the Gibbs phenomenon for "spliced" functions in one and two dimensions. Computers Math. Applic., vol 33, N11, pp 35-58,1997.

[5] Stephen Wolfram. The MATHEMATICA Book. Wolfram media 1996.

[6] D. Gottlieb, C.W.Shu. On the Gibbs phenomenon V; Recovering exponential accuracy from collocation point values of a piecewise analytic function, Math. Comp. 43, 81-92 (1992).

[7] Wolfram S. The MATHEMATICA book, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996.