

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В $\mathbb{R}^2$

Г. А. КАРАГУЯН AND Д. А. КАРАГУЛЯН

Аннотация. В настоящей работе рассматривается вопрос характеристики множеств точек недифференцируемости интегралов по базисам прямоугольников и квадратов. В частности, дана полная характеристизация множеств неопределенностей для интегралов функций из $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$, по базису квадратов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы характеристики экстремальных множеств актуальны во многих направлениях математического анализа. Экстремальные множества часто встречаются в теории ортогональных рядов и в исследованиях граничных поведений аналитических и гармонических функций. Этим вопросам посвящены много работ. Задачи характеристики множеств точек расходимости тригонометрических рядов рассматривались в работах [26, 27, 34, 4, 5, 19, 10]. Аналогичные вопросы для рядов по другим классическим ортогональным системам были рассмотрены в [22, 2, 3, 21, 30, 31, 23, 6, 12, 14, 15]. Подробный обзор некоторых из этих результатов можно найти в статьях П. Л. Ульянова [28, 29]. Характеризация предельных множеств аналитических функций посвящена монография Э. Коллингвуда и А. Ловатера [17].

Первоисточником для многих этих исследований является следующая

Теорема А (Хан-Серпинский, [8, 25]). *Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было множеством расходимости (неограниченной расходимости) некоторой последовательности непрерывных функций на $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством $G_{\delta\sigma}(G_\delta)$.*

Одними из редких результатов, дающих полные характеристики экстремальных множеств являются следующие теоремы.

Теорема В (Колесников [18], 1994). *Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{T}$ было множеством радиальной расходимости некоторой аналитической в единичном круге функции, необходимо и достаточно, что оно было объединением двух множеств, одно из которых G_δ , а другое является нуль-множеством типа $G_{\delta\sigma}$.*

Теорема С (Загорский [33], 1946). *Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было множеством недифференцируемости некоторой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции, необходимо и достаточно, что оно было объединением множества типа G_δ и $G_{\delta\sigma}$ множества меры нуль.*

1991 *Mathematics Subject Classification.* 42B25; 32A40.

Key words and phrases. множества расходимости, дифференцирование интегралов, множества типа $G_{\delta\sigma}$.

В работах [11, 13] установлены общие теоремы характеристики экстремальных множеств последовательностей операторов со свойством локализации, из которых в частности следуют некоторые результаты, упомянутых выше работ. С помощью этих теорем, получены также полные характеристики множеств точек расходимости (C, α) средних рядов Фурье по классическим ортонормированным системам, а также обычных частичных сумм рядов Хаара и Франклина.

В настоящей работе рассматривается вопрос характеристики множеств точек недифференцируемости интегралов функций из $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$. Пусть $\mathfrak{R}$ есть множество всех полуоткрытых прямоугольников (декартовы произведения двух интервалов вида $[a, b)$) в $\mathbb{R}^2$, а через $\mathcal{Q}$ обозначим множество полуоткрытых квадратов на $\mathbb{R}^2$. Очевидно имеем $\mathcal{Q} \subset \mathfrak{R}$. Длину большой стороны прямоугольника $R \in \mathfrak{R}$ обозначим через $\text{diam}(R)$. Пусть $\mathfrak{M}$ есть один из базисов $\mathfrak{R}$ или $\mathcal{Q}$. Для произвольной функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ определим

$$\delta_{\mathfrak{M}}(x, f) = \limsup_{\text{diam}(R) \rightarrow 0: x \in R \in \mathfrak{M}} \left| \frac{1}{|R|} \int_R f(t) dt - f(x) \right|.$$

Говорят, что интеграл функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ в точке $x \in \mathbb{R}^2$ дифференцируем по базису $\mathfrak{M}$, если $\delta_{\mathfrak{M}}(x, f) = 0$. Известны следующие классические теоремы о дифференцировании интегралов (см. [7]).

Теорема D (Лебег, [20]). *Если $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, то $\delta_{\mathcal{Q}}(x, f) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$.*

Теорема E (Йессен-Марцинкевич-Зигмунд, [9]). *Если $f \in L(1 + \log L(\mathbb{R}^2))$, то $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$.*

Отметим, что класс $L(1 + \log L(\mathbb{R}^2))$ представляет собою множество функций $f(x)$, удовлетворяющие условию

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(t)| (1 + \log^+ |f(t)|) dt < \infty,$$

и имеем

$$L^1(\mathbb{R}^2) \supset L(1 + \log L(\mathbb{R}^2)) \supset L^p(\mathbb{R}^2), \quad 1 < p \leq \infty.$$

Согласно теореме E получаем, что интегралы функций класса $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p \leq \infty$, дифференцируемы почти всюду по базису $\mathfrak{R}$.

Теорема F (Безикович, [1]). *Если $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) < \infty$ на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^2$, то $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = 0$ почти всюду на E .*

Теорема G (Сакс, [24]). *Существует функция $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, для которой $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty$ всюду на $\mathbb{R}^2$.*

Определение 1. *Множества*

$$C_{\mathfrak{M}}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathfrak{M}}(x, f) = 0\},$$

$$B_{\mathfrak{M}}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \delta_{\mathfrak{M}}(x, f) < \infty\},$$

$$U_{\mathfrak{M}}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathfrak{M}}(x, f) = \infty\}$$

назовем, соответственно, C , B и U множествами функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса $\mathfrak{M}$ (равной $\mathfrak{R}$ или $\mathcal{Q}$).

Следующие теоремы дают характеристики U , B и C множеств в некоторых пространствах $L^p(\mathbb{R}^2)$ по базисам $\mathfrak{R}$ и $\mathcal{Q}$.

Теорема 1. Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было U -множеством некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса $\mathfrak{R}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ .

Теорема 2. Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было B -множеством некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$, относительно базиса $\mathcal{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было $G_{\delta\sigma}$ -множеством меры нуль.

Теорема 3. Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было U -множеством некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$, относительно базиса $\mathcal{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было G_δ -множеством меры нуль.

В теореме 3 случай $p = \infty$ не рассматривается, так как из $f \in L^\infty$ очевидно следует $U_{\mathcal{Q}}(f) = \emptyset$. Из теорем 2 и 3 немедленно получаем.

Следствие 1. Для того, чтобы попарно непересекающиеся множества $E_1, E_2, E_3 \subset \mathbb{R}^2$ являлись соответственно U , B и C множествами некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$, относительно базиса $\mathcal{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы $|E_1| = |E_2| = 0$, E_1 имело тип G_δ , а E_2 было множеством $G_{\delta\sigma}$.

Следствие 2. Для того, чтобы попарно непересекающиеся множества $E_1, E_2, E_3 \subset \mathbb{R}^2$ являлись соответственно U , B и C множествами некоторой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса $\mathcal{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы $E_1 = \emptyset$, E_2 было $G_{\delta\sigma}$ множеством меры нуль.

2. РАЗБИЕНИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ ФУНКЦИИ

Через $\mathfrak{R}_d$ и $\mathcal{Q}_d$ обозначим соответственно семейства двоичных прямоугольников и квадратов. Имеем $\mathfrak{R}_d \subset \mathfrak{R}$ и $\mathcal{Q}_d \subset \mathcal{Q}$. Через $\overline{E}$ и $\overset{\circ}{E}$ обозначим соответственно замыкание и внутренность множества $E \subset \mathbb{R}^2$. Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называется множеством типа G_δ если оно можно представить в виде счетного пересечения открытых множеств, а счетные объединения множеств типа G_δ называются $G_{\delta\sigma}$ множествами.

Определение 2. Скажем, что семейства A и B двоичных прямоугольников из $\mathfrak{R}_d$ обладают соотношением $A \preceq B$, если для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется одно из условий $a \subset b$ или $a \cap b = \emptyset$. При этом если A состоит из единственного элемента a , то это соотношение можно записывать $a \preceq B$.

Определение 3. Скажем, что семейство двоичных прямоугольников $A \subset \mathfrak{R}_d$ локально-конечно относительно некоторого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2$, если любой компакт $K \subset G$ пересекается лишь с конечным числом элементов из A .

Определение 4. Семейство $\Omega \subset \mathcal{Q}_d$ попарно непересекающихся двоичных квадратов назовем δ -разбиением открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2$, если оно

локально-конечно относительно G и выполняются соотношения

$$(2.1) \quad \begin{aligned} G &= \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega, \\ \delta &> \frac{\text{diam}(\omega)}{\text{dist}(\omega, G^c)} \rightarrow 0, \text{ при } \text{diam}(\omega) \rightarrow 0, \quad \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Лемма 1. Если $\delta > 0$, а $B \subset \mathfrak{R}_d$ есть любое семейство, локально-конечное относительно некоторого ограниченного открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2$, то существует δ -разбиение Ω множества G , такое, что $\Omega \preceq B$.

Доказательство. Пусть A_k , $k = 1, 2, \dots$, есть семейство всевозможных двоичных квадратов, длины сторон которых равны 2^{-k} и выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \omega &\preceq B, \\ \text{diam}(\omega) &< \frac{\delta \cdot \text{dist}(\omega, G^c)}{k}, \quad \omega \in A_k. \end{aligned}$$

Заметим, что A_k будет не пустым при $k > k_0$. Обозначим

$$A'_k = \left\{ \omega \in A_k : \omega \not\subset \bigcup_{\omega \in A_{k-1}} \omega \right\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Легко проверить, что семейство квадратов

$$\Omega = A_1 \cup \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} A'_k \right)$$

удовлетворяет условиям леммы. □

Для данного квадрата $\omega \in \mathcal{Q}$ определим пирамидообразную функцию

$$\lambda_\omega(x) = \text{dist}(x, \omega^c), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

которая очевидно является непрерывной. Рассматриваются функции

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u(x, n) &= 3 \cdot (n+1)2^{n-2} \left(\lambda_{[0, 2^{-n}] \times [0, 2^{-n}]}(x) + \lambda_{[1/2, 1/2+2^{-n}] \times [1/2, 1/2+2^{-n}]}(x) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{[0, 2^{-n}] \times [1/2, 1/2+2^{-n}]}(x) - \lambda_{[1/2, 1/2+2^{-n}] \times [0, 2^{-n}]}(x) \right), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

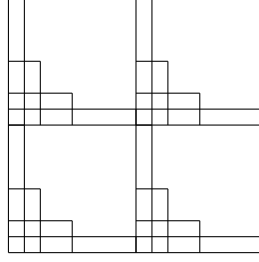
$$(2.3) \quad \begin{aligned} v(x) &= \lambda_{[0, 1/2] \times [0, 1/2]}(x) + \lambda_{[1/2, 1] \times [1/2, 1]}(x) \\ &\quad - \lambda_{[0, 1/2] \times [1/2, 1]}(x) - \lambda_{[1/2, 1] \times [0, 1/2]}(x). \end{aligned}$$

Определим четыре множества

$$(2.4) \quad E_{ij}(n) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{i}{2}, \frac{i}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} \right] \times \left[\frac{j}{2}, \frac{j}{2} + \frac{1}{2^{n-k}} \right], \quad i, j = 0, 1,$$

и обозначим

$$(2.5) \quad E(n) = E_{00}(n) \cup E_{01}(n) \cup E_{10}(n) \cup E_{11}(n).$$



Пусть $\omega \in \mathcal{Q}$ есть произвольный квадрат, а ϕ_ω линейное преобразование в $\mathbb{R}^2$, отображающее ω на единичный квадрат $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Обозначим

$$\begin{aligned} u_\omega(x, n) &= u(\phi_\omega(x), n), \\ v_\omega(x) &= v(\phi_\omega(x)), \\ E_\omega(n) &= (\phi_\omega)^{-1}(E(n)). \end{aligned}$$

Простые вычисления показывают, что

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \|u_\omega(x, n)\|_1 &= |E_\omega(n)| = |E(n)||\omega| = \frac{n+1}{2^n}|\omega|, \\ \|v_\omega(x)\|_1 &= |\omega|/3. \end{aligned}$$

Далее, заметим, что если $\omega \in \mathcal{Q}_d$ есть двоичный прямоугольник, то для любой точки $x \in E_\omega(n)$ существует двоичный прямоугольник $R(x)$ для которого имеем

$$(2.7) \quad \frac{1}{|R(x)|} \left| \int_{R(x)} u_\omega(x, n) dx \right| = \frac{n+1}{2}, \quad x \in R(x) \subset E_\omega(n),$$

и этот прямоугольник совпадает с одним из прямоугольников, участвующих в объединении (2.4). Аналогично, если вновь $\omega \in \mathcal{Q}_d$, то

$$(2.8) \quad \frac{1}{|R(x)|} \left| \int_{R(x)} v_\omega(x) dx \right| = \frac{1}{3}, \quad x \in R(x) \subset \omega$$

для некоторого квадрата $R(x)$ с $|R(x)| = |\omega|/4$. На этот раз $R(x)$ просто совпадает с одним из четырех квадратов, составляющих ω . При этом отметим, что в обоих случаях $R(x)$ выбирается из конечного набора прямоугольников.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для данного прямоугольника $R \in \mathfrak{R}$ обозначим через $\text{vertexes}(R)$ множество четырех вершин прямоугольника R .

Лемма 2. Если $Q \in \mathcal{Q}$ и функция $f(x) = f(x_1, x_2) \in L(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условиям

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \text{supp } f(x) &\subset Q, \\ \int_{\mathbb{R}} f(x_1, t) dt &= \int_{\mathbb{R}} f(t, x_2) dt = 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

то для любого прямоугольника $R \in \mathfrak{R}$ с условием $Q \cap \text{vertexes}(R) = \emptyset$ имеем

$$(3.2) \quad \int_R f(x) dx = 0.$$

Доказательство. Если $R \cap Q = \emptyset$, то (3.2) тривиально. Предположим, что

$$Q = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2), \quad R = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2).$$

С учетом условия $Q \cap \text{vertexes}(R) = \emptyset$, остается лишь рассматривать случаи $[\alpha_1, \beta_1) \subset [a_1, b_1)$ или $[\alpha_2, \beta_2) \subset [a_2, b_2)$. Если имеем первое соотношение, то с учетом (3.1), легко усмотреть, что

$$\begin{aligned} \int_R f(x) dx &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Второй случай рассматривается аналогичным образом. $\square$

Лемма 3. Если $Q \in \mathcal{Q}$ и функция $f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условию

$$(3.3) \quad \text{supp } f(x) \subset Q,$$

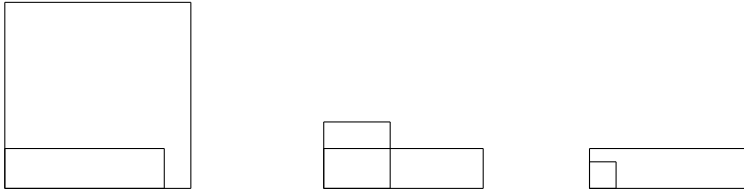
то для любого прямоугольника $R \in \mathfrak{R}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{|R|} \int_R |f(x)| dx \leq \frac{\|f\|_\infty \cdot \text{diam}(Q)}{\text{diam}(R)}.$$

Доказательство. Покажем неравенство

$$(3.4) \quad \frac{|Q \cap R|}{|R|} \leq \frac{\text{diam}(Q)}{\text{diam}(R)}.$$

Параллельным переносом квадрат Q можно переставить так, чтобы его вершина совпадала с одной вершиной прямоугольника. Заметим, что тогда величина $|Q \cap R|$ принимает наибольшее значение, а все остальные величины в неравенстве (3.4) сохраняются. Поэтому без потери общности можно рассматривать только следующие случаи взаимного расположения Q и R .



Пусть сторона квадрата равна c , а стороны прямоугольника равны a, b и при этом $a \leq b$. При первом случае имеем

$$\frac{|Q \cap R|}{|R|} = 1 \leq \frac{c}{b} = \frac{\text{diam}(Q)}{\text{diam}(R)},$$

при втором имеем

$$\frac{|Q \cap R|}{|R|} = \frac{a \cdot c}{a \cdot b} = \frac{c}{b} = \frac{\text{diam}(Q)}{\text{diam}(R)},$$

а при третьем

$$\frac{|Q \cap R|}{|R|} = \frac{c^2}{a \cdot b} \leq \frac{c}{b} = \frac{\text{diam}(Q)}{\text{diam}(R)}.$$

Из (3.3) и (3.4) вытекает

$$\frac{1}{|R|} \int_R |f(x)| dx \leq \frac{\|f\|_\infty |Q \cap R|}{|R|} \leq \frac{\|f\|_\infty \cdot \text{diam}(Q)}{\text{diam}(R)}.$$

□

Лемма 4. Если $L > 1$, а $Q \in \mathcal{Q}_d$ есть произвольный двоичный квадрат, то существует функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и число $c(L) > 0$ такие, что

$$(3.5) \quad \text{supp } f \subset Q,$$

$$(3.6) \quad \|f\|_\infty \leq c(L),$$

$$(3.7) \quad \|f\|_1 \leq 2|Q|,$$

$$(3.8) \quad \int_R f(x) dx = 0, \quad R \in \mathfrak{R}, \quad Q \cap \text{vertexes}(R) = \emptyset,$$

и для любой точки $x \in Q$ существует двоичный прямоугольник $R(x) \subset Q$, такой что

$$(3.9) \quad \frac{1}{|R(x)|} \left| \int_{R(x)} f(t) dt \right| \geq L, \quad x \in Q,$$

при этом семейство $\{R(x) : x \in Q\}$ состоит из конечного числа элементов.

Доказательство. Пусть $n = [3L] + 1$ и m есть некоторое натуральное число. Определим множества

$$(3.10) \quad Q = G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_m,$$

и конечные семейства двоичных квадратов $\Omega_k \subset \mathcal{Q}_d$, $k = 1, 2, \dots, m$, такие, что

$$(3.11) \quad G_k = \bigcup_{\omega \in \Omega_k} \omega, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$(3.12) \quad G_k = G_{k-1} \setminus \bigcup_{\omega \in \Omega_{k-1}} E_\omega(n), \quad k = 2, \dots, m,$$

где множества $E_\omega(n)$ определены в (2.5). Воспользуемся математической индукцией. В качестве первого шага возьмем просто $G_1 = Q$ и $\Omega_1 = \{Q\}$. Нуждается проверке только условие (3.11), которое очевидно. Предположим, что уже определены множества G_k и семейства Ω_k при $k = 1, 2, \dots, p$, удовлетворяющие условиям (3.10)-(3.12). Определим множество

$$G_{p+1} = G_p \setminus \bigcup_{\omega \in \Omega_p} E_\omega(n).$$

Очевидно оно можно представить в виде конечного объединения двоичных квадратов, которые и составляют Ω_{p+1} . В итоге получаем

$$G_{p+1} = \bigcup_{\omega \in \Omega_{p+1}} \omega.$$

Очевидно G_{p+1} и Ω_{p+1} удовлетворяют условиям (3.10)-(3.12) при $k = p + 1$. Учитывая (2.6), (3.11) и (3.12), имеем

$$|G_k| = |G_{k-1}| - \left| \bigcup_{\omega \in \Omega_{k-1}} E_\omega(n) \right| = |G_{k-1}| - \frac{n+1}{2^n} |G_{k-1}| = \left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right) |G_{k-1}|$$

и следовательно получим

$$(3.13) \quad |G_m| = \left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right)^m |Q| < \frac{|Q|}{n},$$

при достаточно большом $m = m(n)$. Обозначим

$$(3.14) \quad f_k(x) = \sum_{\omega \in \Omega_k} u_\omega(x, n), \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$(3.15) \quad f_m(x) = n \sum_{\omega \in \Omega_m} v_\omega(x).$$

Учитывая (2.6), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) и (3.15), легко проверить, что

$$(3.16) \quad \text{supp } f_k \subset G_k \setminus G_{k+1} = \bigcup_{\omega \in \Omega_k} E_\omega(n), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \|f_k\|_1 &= \sum_{\omega \in \Omega_k} \|a_\omega(x, n)\|_1 \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_k} |E_\omega(n)| = |G_k| - |G_{k+1}|, \quad k = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

$$(3.18) \quad \|f_m\|_1 = n \cdot |G_m| \leq |Q|,$$

$$(3.19) \quad \|f_k\|_\infty = 3(n+1)2^{n-2} = c(L).$$

Определим

$$f(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x).$$

Очевидно $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и имеют место (3.5) и (3.6). Далее, с учетом (3.10), (3.17) и (3.18), получаем

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \sum_{k=1}^{m-1} (|G_k| - |G_{k+1}|) + |Q| = 2|Q| - |G_m| \leq 2|Q|,$$

из которой вытекает (3.7). Условие (3.8) немедленно следует из леммы 3. Чтобы показать (3.9), возьмем любую точку $x \in Q$. Имеем $x \in G_k \setminus G_{k+1}$ при некотором $k = 1, 2, \dots, m$, где предполагается $G_{m+1} = \emptyset$. Из (3.16) получаем, что $x \in E_\omega(n)$ для некоторого квадрата $\omega \in \Omega_k$. Если $k < m$, то согласно (2.7) существует прямоугольник $R = R(x)$, $x \in R \subset E_\omega(n)$, так что

$$\frac{1}{|R|} \left| \int_R f(t) dt \right| = \frac{1}{|R|} \left| \int_R a_\omega(t, n) dt \right| = \frac{n+1}{2} > L.$$

Если же $k = m$, то из (2.8) вытекает

$$\frac{1}{|R|} \left| \int_R f(t) dt \right| = \frac{n}{|R|} \left| \int_R b_\omega(t) dt \right| = \frac{n}{3} > L$$

для некоторого квадрата $R = R(x)$, $x \in R \subset \omega$. При этом имеем, что семейство $\{R(x), x \in Q\}$ составляет конечный набор. $\square$

Лемма 5. Если $G \subset \mathbb{R}^2$ -ограниченное открытое множество, а семейство двоичных прямоугольников $A \subset \mathfrak{R}_d$ локально-конечно относительно G , то для любых чисел $L > 1$, $\varepsilon > 0$ существует функция $f(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ такая, что

$$(3.20) \quad \text{supp } f \subset G,$$

$$(3.21) \quad \|f\|_1 \leq 1,$$

$$(3.22) \quad \int_R f(x) dx = 0, \quad R \in A,$$

$$(3.23) \quad \delta_{\mathfrak{R}}(f, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

$$(3.24) \quad \frac{1}{|R|} \left| \int_R f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad R \in \mathfrak{R}, R \not\subset G,$$

и для любой точки $x \in G$ существует двоичный прямоугольник $R = R(x) \subset G$, такой что

$$(3.25) \quad \frac{1}{|R(x)|} \left| \int_{R(x)} f(t) dt \right| \geq L, \quad x \in R(x) \subset G,$$

при этом семейство $\{R(x) : x \in G\}$ локально-конечно относительно G .

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ есть некоторое число. Согласно лемме 1 существует δ -разбиение Ω для множества G , такое что

$$(3.26) \quad \Omega \preceq A.$$

Применив лемму 4 над каждым квадратом $Q \in \Omega$, мы получим функции $f_Q(x)$, $Q \in \Omega$, удовлетворяющие условиям (3.5)-(3.9). Обозначим

$$(3.27) \quad f(x) = \frac{1}{2|G|} \sum_{Q \in \Omega} f_Q(x).$$

Ясно, что имеет место (3.20) и

$$(3.28) \quad \|f\|_\infty \leq \frac{c(L)}{2|G|}.$$

Далее, в силу (3.7) (для функций f_Q), имеем

$$\|f\|_1 \leq \frac{1}{2|G|} \sum_{Q \in \Omega} \|f_Q\|_1 \leq \frac{1}{2|G|} \sum_{Q \in \Omega} 2|Q| = 1,$$

и получим (3.21). Из (3.8) в частности имеем

$$(3.29) \quad \int_Q f_Q(t) dt = 0.$$

Из условия (3.26) следует, что для любых $R \in A$ и $Q \in \Omega$ имеем $Q \subset R$ или $Q \cap R = \emptyset$, и поэтому, с учетом (3.29), получим

$$\int_R f_Q(x) dx = 0, \quad Q \in \Omega,$$

из которой следует (3.22). Если $x \in G$, то $x \in Q$ при некотором $Q \in \Omega$. Согласно (3.9), существует прямоугольник $R = R(x) \subset Q$, удовлетворяющее условию

$$\frac{1}{|R|} \left| \int_R f_Q(t) dt \right| \geq 2L|G|.$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{|R|} \left| \int_R f(t) dt \right| = \frac{1}{2|G||R|} \left| \int_R f_Q(t) dt \right| \geq L,$$

которое дает (3.25). Согласно лемме 4 семейство $\{R(x) : x \in Q\}$ состоит из конечного числа прямоугольников. С учетом (3.26), легко усмотреть, что $\{R(x) : x \in G\}$ станет локально-конечным относительно G . Теперь рассмотрим любые $Q \in \Omega$ и $R \in \mathfrak{R}$. Если имеет место

$$Q \cap \text{vertexes}(R) = \emptyset,$$

то согласно лемме 2, получим

$$\int_R f_Q(x) dx = 0.$$

Если же имеем

$$(3.30) \quad R \not\subset G, \quad Q \cap \text{vertexes}(R) \neq \emptyset,$$

то легко усмотреть, что $\text{diam}(R) \geq \text{dist}(Q, G^c)/2$. Отсюда, применив лемму 3 и соотношения (2.1), (3.28), заключаем

$$(3.31) \quad \frac{1}{|R|} \left| \int_R f_Q(x) dx \right| \leq \frac{\|f\|_\infty \cdot \text{diam}(Q)}{\text{diam}(R)} \leq \frac{c(L)}{|G|} \cdot \frac{\text{diam}(Q)}{\text{dist}(Q, G^c)} \rightarrow 0,$$

при $\text{diam}(R) \rightarrow 0$. Отметим, что при фиксированном R количество таких квадратов $Q \in \Omega$, которые удовлетворяют (3.30) не превосходит 4. Отсюда и из (3.27) вытекает

$$\begin{aligned} \delta_{\mathfrak{R}}(x, f) &= \lim_{\text{diam}(R) \rightarrow 0: x \in R \in \mathfrak{R}} \frac{1}{|R|} \left| \int_R f(t) dt - f(x) \right| \\ &= \lim_{\text{diam}(R) \rightarrow 0: x \in R \in \mathfrak{R}} \frac{1}{|R|} \left| \int_R f(t) dt \right| = 0, \quad x \in G^c, \end{aligned}$$

т.е. имеет место (3.23) при $x \in G^c$. Если же $x \in G$, то любой прямоугольник R у которого величина $\text{diam}(R)$ достаточно мала пересекается лишь конечным числом квадратов из Ω . С другой стороны $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f_Q) = 0$, так как каждая из f_Q является непрерывной функцией. Отсюда легко следует

$$\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = 0, \quad x \in G,$$

и мы получаем (3.23) полностью. Аналогичными рассуждениями, при условии (3.30), из (2.1) и (3.31) заключаем

$$(3.32) \quad \frac{1}{|R|} \left| \int_R f(x) dx \right| \leq 4 \cdot \frac{c(L)}{|G|} \cdot \frac{\text{diam}(Q)}{\text{dist}(Q, G^c)} \leq \frac{4c(L)\delta}{|G|},$$

которое дает (3.24) при достаточно малом δ . □

Доказательство теоремы 1. Необходимость: Для данной функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим множества

$$A_n(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \exists R \in \mathfrak{R}, x \in R, \text{diam}(R) < 1/n, \left| \frac{1}{|R|} \int_R f(t) dt \right| > n \right\},$$

которые очевидно являются открытыми. Докажем, что

$$(3.33) \quad A(f) = \bigcap_{n \geq 1} A_n(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty\}.$$

Для этого достаточно проверить, что

$$x \in A(f), \Leftrightarrow x \in A_n(f), \text{ при любом } n = 1, 2, \dots$$

$$\Leftrightarrow \exists R_k \in \mathfrak{R}, x \in R_k, \text{diam}(R_k) \rightarrow 0, \left| \frac{1}{|R_k|} \int_{R_k} f(t) dt \right| \rightarrow \infty,$$

$$\Leftrightarrow \delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty.$$

Соотношение (3.33) устанавливает, что $\{x \in \mathbb{R} : \delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty\}$ является множеством типа G_δ .

Достаточность: Пусть E есть некоторое множество типа G_δ . Сначала предположим, что $E \subset Q$, где Q есть некоторый квадрат. Тогда имеем

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

где, без ограничения общности, можно предполагать, что множества $G_k \subset 2Q$ и $G_{k+1} \subset G_k$, $k = 1, 2, \dots$. Докажем, что существует последовательность функций $f_k \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $k = 1, 2, \dots$, для которых имеют место соотношения

$$(3.34) \quad \text{supp } f_k \subset G_k, \quad \|f_k(t)\|_1 = 1,$$

$$(3.35) \quad \delta_{\mathfrak{R}}(x, f_k) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(3.36) \quad \frac{1}{|R|} \left| \int_R f_k(x) dx \right| < 2^{-k}, \quad R \in \mathfrak{R}, R \not\subset G_k,$$

и для любой точки $x \in G_k$ существует двоичный прямоугольник $R_k(x)$, такой что

$$(3.37) \quad \frac{1}{|R_k(x)|} \left| \int_{R_k(x)} f_k(t) dt \right|$$

$$\geq 2^k + \sum_{j=1}^{k-1} \|f_j\|_\infty, \quad x \in R_k(x) \subset G_k, \quad k \geq 1,$$

$$(3.38) \quad \int_{R_j(x)} f_k(t) dt = 0, \quad x \in G_j, \quad j = 1, 2, \dots, k-1,$$

при этом семейство $\{R_k(x) : x \in G_k\}$ является локально-конечным относительно G_k . Будем воспользоваться индукцией. Случай $k = 1$ сразу же получится, если применить лемму 5 при $G = G_1$ и $A = \emptyset$. Предположим, что уже определены функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, p$ со свойствами (3.34)-(3.38). Обозначим

$$(3.39) \quad A = \bigcup_{k=1}^p \{R_k(x) : x \in G_k\}.$$

По предположению индукции, каждое из семейств $\{R_k(x) : x \in G_k\}$, $k = 1, 2, \dots, p$, является локально-конечным относительно G_k . Отсюда очевидно, что множество прямоугольников A будет локально конечным относительно G_{p+1} . Тогда применив лемму 5 при A определенной в (3.39) и

$$G = G_{p+1}, \quad \delta = 2^{-p-1}, \quad L = 2^{p+1} + \sum_{j=1}^p \|f_j\|_\infty,$$

можно определить функцию $f_{p+1}(x)$, удовлетворяющую условиям леммы 5. Обозначим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Возьмем любую точку $x \in E$. Имеем $x \in G_k$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть $R_k(x)$ есть последовательность прямоугольников, удовлетворяющие условиям (3.37) и (3.38). Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|R_k(x)|} \left| \int_{R_k(x)} f(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{|R_k(x)|} \left| \int_{R_k(x)} \sum_{j=1}^k f_j(t) dt \right| \\ &\geq \frac{1}{|R_k(x)|} \left| \int_{R_k(x)} f_k(t) dt \right| - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{|R_k(x)|} \left| \int_{R_k(x)} f_j(t) dt \right| \\ &\geq \frac{1}{|R_k(x)|} \left| \int_{R_k(x)} f_k(t) dt \right| - \sum_{j=1}^{k-1} \|f_j\|_{\infty} \geq 2^k, \end{aligned}$$

и следовательно $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty$. Теперь предположим, что $x \in E^c$. Тогда имеем $x \in G_{k-1} \setminus G_k$ при некотором $k = 1, 2, \dots$, где предполагается $G_0 = \mathbb{R}$ и имеем

$$(3.40) \quad f_j(x) = 0, \quad j \geq k.$$

Если $m \geq k$, то, с учетом (3.35), (3.36) и (3.40), получаем

$$\begin{aligned} \delta_{\mathfrak{R}}(x, f) &= \delta_{\mathfrak{R}} \left(x, \sum_{j=m}^{\infty} f_j \right) \\ &\leq \limsup_{\text{diam}(R) \rightarrow 0, x \in R \in \mathfrak{R}} \sum_{j=m}^{\infty} \left| \frac{1}{|R|} \int_R f_j(t) dt - f_j(x) \right| \\ &= \limsup_{\text{diam}(R) \rightarrow 0, x \in R \in \mathfrak{R}} \sum_{j=m}^{\infty} \left| \frac{1}{|R|} \int_R f_j(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j}. \end{aligned}$$

Так как $m \in \mathbb{R}$ —произвольное число, то отсюда получаем $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = 0$, что и доказывает достаточность в случае когда E содержится в некотором квадрате Q . Дополнительно отметим, что построенная функция f удовлетворяет условию $\text{supp } f \subset 2Q$. Теперь предположим, что E есть произвольное множество типа G_{δ} . Пусть Q_k есть последовательность квадратов с

$$\text{diam}(Q_k) = 1, \quad \cup_k Q_k = \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, что каждое множество $E_k = E \cap Q_k$ имеет тип G_δ . Применив доказанное над каждым множеством E_k , найдем функции $F_k(x)$, с условиями

$$\begin{aligned} \text{supp } F_k &\subset 2Q_k, \\ \delta_{\mathfrak{R}}(x, F_k) &= 0, \quad x \in (E_k)^c, \\ \delta_{\mathfrak{R}}(x, F_k) &= \infty, \quad x \in E_k. \end{aligned}$$

Легко усмотреть, что функция

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x)$$

будет искомой. Действительно, если $x \in E^c$, то имеем

$$\lim_{\text{diam}(R) \rightarrow 0, x \in R \in \mathfrak{R}} \frac{1}{|R|} \int_R F_k(t) dt = F_k(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как каждый прямоугольник $R \in \mathfrak{R}$ пересекается лишь с конечным числом из квадратов $2Q_k$, то получим

$$\lim_{\text{diam}(R) \rightarrow 0, x \in R \in \mathfrak{R}} \frac{1}{|R|} \int_R F(t) dt = \sum_k \lim_{\text{diam}(R) \rightarrow 0, x \in R \in \mathfrak{R}} \frac{1}{|R|} \int_R F_k(t) dt = F(x).$$

Если же $x \in E$, то имеем $x \in E_k$, при некотором k и $x \notin E_j$, $j \neq k$. Отсюда, аналогичным образом легко получить $\delta_{\mathfrak{R}}(x, F) = \infty$. Теорема доказана. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 2 И 3

Для данного измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ обозначим

$$\lambda(A) = A \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_A) > 0\}.$$

Так как по теореме D имеем

$$\delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_A) = 0 \text{ п.в.,}$$

то получим

$$(4.1) \quad |\lambda(A) \setminus A| = 0.$$

Легко проверить также следующие свойства

$$(4.2) \quad \lambda(A \cup B) \subset \lambda(A) \cup \lambda(B),$$

$$(4.3) \quad \lambda(A) \subset \lambda(B), \text{ при } A \subset B.$$

Лемма 6. Если $\delta > 0$, G есть открытое множество, а $E \subset G$ имеет меру нуль, то существует другое открытое множество U такое, что

$$(4.4) \quad E \subset U \subset G,$$

$$(4.5) \quad |Q \cap U| < \delta |Q|, \quad Q \in \mathcal{Q}, \quad \overline{Q} \not\subset G,$$

$$(4.6) \quad \lambda(U) \subset G.$$

Доказательство. Согласно лемме 1, существует разбиение Ω множества G , такое, что

$$(4.7) \quad \frac{1}{5} > \frac{\text{diam}(\omega)}{\text{dist}(\omega, G^c)} \rightarrow 0, \text{ при } \text{diam}(\omega) \rightarrow 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Очевидно можно выбрать открытое множество U такое, что

$$E \subset U, \quad |\omega \cap U| < \min\{\delta/4, \text{dist}(\omega, G^c)\}|\omega|.$$

Пусть Q есть произвольный квадрат, такой что $\overline{Q} \not\subset G$. Тогда, если $\omega \in \Omega$ и $\omega \cap Q \neq \emptyset$, то согласно (4.7) имеем

$$\text{diam}(\omega) < \frac{\text{dist}(\omega, G^c)}{5} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \text{diam}(Q)}{5} < \frac{\text{diam}(Q)}{2}.$$

Отсюда, с учетом соотношения $\omega \cap Q \neq \emptyset$, легко следует $\omega \subset 2Q$ и следовательно имеем

$$\text{dist}(\omega, G^c) \leq \sqrt{2} \cdot \text{diam}(2Q) = 2\sqrt{2} \cdot \text{diam}(Q) < 4 \cdot \text{diam}(Q).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} |Q \cap U| &\leq \sum_{\omega \in \Omega: \omega \cap Q \neq \emptyset} |\omega \cap U| \\ &\leq \sum_{\omega \in \Omega: \omega \cap Q \neq \emptyset} \min\{\delta/4, \text{dist}(\omega, G^c)\} |\omega| \\ (4.8) \quad &\leq \min\{\delta/4, 4 \cdot \text{diam}(Q)\} \sum_{\omega \in \Omega: \omega \cap Q \neq \emptyset} |\omega| \\ &\leq \min\{\delta/4, 4 \cdot \text{diam}(Q)\} \sum_{\omega \in \Omega: \omega \subset 2Q} |\omega| \\ &\leq \min\{\delta, 4 \cdot \text{diam}(Q)\} |Q|, \end{aligned}$$

из которой немедленно следует (4.5). Чтобы установить (4.6) возьмем любую точку $x \in G^c$. Из (4.8) следует

$$\lim_{\text{diam}(Q) \rightarrow 0: x \in Q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{|Q|} \int_Q \mathbb{I}_U(t) dt = \lim_{\text{diam}(Q) \rightarrow 0: x \in Q \in \mathfrak{R}} \frac{|Q \cap U|}{|Q|} = 0,$$

и следовательно получим $\delta_Q(x, \mathbb{I}_U) = 0$ при $x \in G^c$. Это значит, что $\lambda(U) \subset G$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. Если $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$ есть открытые множества, то существует другое открытое множество G , такое, что

$$(4.9) \quad A \subset G \subset B,$$

$$(4.10) \quad |G| = \frac{|A| + |B|}{2},$$

$$(4.11) \quad \lambda(G \setminus A) \subset B.$$

Доказательство. Если $|A| = |B|$, то возьмем $G = A$ и нечего будет доказывать. Так что, предположим $|A| < |B|$. Пусть $\Omega = \{\omega_k\}$ есть произвольное разбиение множества B . Существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$(4.12) \quad \sum_{k=1}^p |\omega_k| > \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Обозначим

$$(4.13) \quad G(t) = A \cup \left(\bigcup_{k=1}^p (t\dot{\omega}_k) \right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и рассмотрим функцию $f(t) = |G(t)|$. Из (4.12) и (4.13) следует

$$\begin{aligned} f(0) &= |A| < \frac{|A| + |B|}{2}, \\ f(1) &\geq \sum_{k=1}^p |\omega_k| > \frac{|A| + |B|}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из непрерывности $f(t)$ следует, что для некоторого $0 < t_0 < 1$ имеет место равенство

$$|G(t_0)| = \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Легко усмотреть, что $G = G(t_0)$ удовлетворяет условиям (4.9) и (4.10). Для проверки (4.11), заметим, что согласно (4.13) имеем соотношение

$$G \setminus A \subset \cup_{k=1}^p (t_0 \hat{\omega}_k),$$

из которого легко вытекает также (4.11). $\square$

Лемма 8. Если $B \subset \mathbb{R}^2$ есть открытое, а $A \subset B$ измеримое множества, с $\lambda(A) \subset B$, то существует другое открытое множество $G \subset B$ такое, что

$$(4.14) \quad \lambda(A) \subset G, \quad \lambda(G) \subset B,$$

$$(4.15) \quad |G| = \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Доказательство. Так как $|\lambda(A) \setminus A| = 0$, частично используя лемму 6, найдем открытое множество C такое, что

$$\lambda(A) \setminus A \subset C, \quad \lambda(C) \subset B.$$

Далее, согласно лемме 7, существует другое открытое множество G , такое, что

$$\begin{aligned} A \cup C &\subset G \subset B, \\ \lambda(G \setminus (A \cup C)) &\subset B, \\ |G| &= \frac{|A| + |B|}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.1)-(4.3) получаем

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\subset A \cup C \subset G, \\ \lambda(G) &\subset \lambda(G \setminus (A \cup C)) \cup \lambda(A \cup C) \\ &\subset \lambda(G \setminus (A \cup C)) \cup \lambda(A) \cup \lambda(C) \subset B. \end{aligned}$$

$\square$

Рассмотрим семейство открытых множеств $\{G_r : r \in E\}$, где $E \subset \mathbb{R}$ — некоторое множество индексов. Скажем, что это семейство является цепью, если $\lambda(G_r) \subset G_{r'}$ при любых $r, r' \in E$, с $r < r'$.

Лемма 9. Если A и B — открытые множества в $\mathbb{R}^2$, с условиями $\lambda(A) \subset B$ и $\alpha = |A| < |B| = \beta$, то существует цепь открытых множеств

$$G_r, \quad r \in \mathcal{D} = \left\{ \alpha + \frac{i(\beta - \alpha)}{2^k}, 0 \leq i \leq 2^k, k = 0, 1, \dots \right\}$$

такая, что

$$(4.16) \quad G_\alpha = A, \quad G_\beta = B, \quad |G_r| = r, \quad r \in [\alpha, \beta].$$

Доказательство. Определим $G_\alpha = A$, $G_\beta = B$ и применим лемму 8 над парой открытых множеств G_α, G_β . Этим определяется открытое множество $G = G_{(\alpha+\beta)/2}$, с условиями (4.14) и (4.15), что означает множества

$$G_\alpha, G_{(\alpha+\beta)/2}, G_\beta$$

образуют цепь. Далее, продолжим рассуждения по индукции. Обозначим

$$\mathcal{D}_k[\alpha, \beta] = \left\{ \alpha + \frac{i(\beta - \alpha)}{2^k}, 0 \leq i \leq 2^k \right\},$$

и предположим, что уже выбраны множества G_r , для всех $r \in \mathcal{D}_k[\alpha, \beta]$, при этом они образуют цепь и $|G_r| = r$. Применив лемму 8 над каждой парой множеств $G_{i/2^k}, G_{(i+1)/2^k}$, получим множества $G_{(2i+1)/2^{k+1}}$, $0 \leq i \leq 2^k - 1$. Ясно, что полученное таким путем семейство $\{G_r, r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha, \beta]\}$ тоже будет цепью. При этом сохраняется свойство $|G_r| = r$ теперь уже при $r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha, \beta]$. В самом деле, имеем

$$|G_{(2i+1)/2^{k+1}}| = \frac{1}{2}(|G_{i/2^k}| + |G_{(i+1)/2^k}|) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k} \right) = \frac{2i+1}{2^{k+1}}.$$

Продолжив этот процесс, получим семейство множеств G_r , определенные при всех $r \in \mathcal{D}$, которое будет цепью и $|G(r)| = r$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 10. Если $\varepsilon > 0$, $G \subset \mathbb{R}^2$ есть открытое множество, а $E \subset G$ имеет меру нуль, то существуют открытое множество A , с $E \subset A \subset G$, и функция $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, такие, что

$$(4.17) \quad \text{supp } h \subset G, \quad h(x) = 1, \quad x \in A,$$

$$(4.18) \quad 0 \leq h(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

$$(4.19) \quad \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q h(t) dt \right| \leq \varepsilon, \quad Q \in \mathcal{Q}, \quad \overline{Q} \not\subset G,$$

$$(4.20) \quad \delta_Q(x, h) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Доказательство. Применив лемму 6, получим открытое множество B с условиями

$$(4.21) \quad E \subset B \subset G,$$

$$(4.22) \quad |Q \cap B| < \varepsilon |Q|, \quad Q \in \mathcal{Q}, \quad \overline{Q} \not\subset G,$$

$$(4.23) \quad \lambda(B) \subset G.$$

Далее, применив лемму 8, получим открытое множество A , с условиями $E \subset A$, $|A| < |B|$ и $\lambda(A) \subset B$. Пусть $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$. Согласно лемме 9, существует цепь открытых множеств $\{G(r) : r \in \mathcal{D}\}$, удовлетворяющая условиям

$$G_\alpha = A, \quad G_\beta = B, \quad |G_r| = r.$$

Обозначим

$$\tau(x) = \inf\{r : x \in G_r\}, \quad x \in B \setminus A.$$

Отметим, что $\tau(x)$ отображает множество $B \setminus A$ в $[\alpha, \beta]$. Определим непрерывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, \alpha], \\ 0 & \text{при } x \in [\beta, 1], \\ \text{линейна на} & [\alpha, \beta], \end{cases}$$

и функцию

$$(4.24) \quad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in A, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R}^2 \setminus B, \\ f(\tau(x)) & \text{при } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Очевидно $\text{supp } h(x) \subset B \subset G$ и выполняются условиям (4.17) и (4.18). Из (4.22) следует

$$\frac{1}{|Q|} \left| \int_Q h(t) dt \right| \leq \frac{|Q \cap B|}{|Q|} < \varepsilon, \quad Q \in \mathcal{Q}, \quad \overline{Q} \not\subset G$$

и получаем (4.19). Остается проверить условие (4.20). Рассмотрим функцию

$$(4.25) \quad p(x) = \mathbb{I}_{G_{r_0}}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(r_k) \mathbb{I}_{G_{r_{k+1}} \setminus G_{r_k}}(x),$$

где числа $r_k \in \mathcal{D}$ удовлетворяют неравенству

$$\alpha = r_0 < r_1 < \dots < r_m = \beta.$$

Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать r_k такими, что

$$(4.26) \quad |h(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

В самом деле, имеем

$$(4.27) \quad h(x) = p(x) = 1, \quad x \in G_\alpha,$$

$$(4.28) \quad h(x) = p(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus G_\beta.$$

Если же $x \in G_\beta \setminus G_\alpha$, то имеем $x \in G_{r_{k+1}} \setminus G_{r_k}$ при некотором $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда из определения отображения τ следует, что $r_k \leq \tau(x) \leq r_{k+1}$. Учитывая (4.24), отсюда получится

$$(4.29) \quad \inf_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t) \leq h(u) \leq \sup_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t), \quad u \in G_{r_{i+1}} \setminus G_{r_i}.$$

Имеем также

$$(4.30) \quad \inf_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t) \leq f(r_i) \leq \sup_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t).$$

Из непрерывности $f(t)$ следует, что при достаточно малом

$$\delta = \max_{0 \leq i < m} (r_{i+1} - r_i)$$

имеем

$$(4.31) \quad \sup_{t, t' \in [r_i, r_{i+1}]} |f(t) - f(t')| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Комбинируя (4.27)-(4.31), получаем (4.26). Из (4.26), (4.25) следует

$$(4.32) \quad \delta_{\mathcal{Q}}(x, h) \leq \delta_{\mathcal{Q}}(x, h - p) + \delta_{\mathcal{Q}}(x, p) \leq \varepsilon + \delta_{\mathcal{Q}}(x, p).$$

Для доказательства (4.20) рассмотрим три случая.

Случай 1: $x \in G_\alpha$. Имеем, что G_α -открытое множество и $h(t) = 1$ при $t \in G_\alpha$.

Отсюда следует (4.20) при таких x .

Случай 2: $x \in G_\beta \setminus G_\alpha$. В этом случае имеем

$$(4.33) \quad x \in G_{r_{k+1}} \setminus G_{r_k}$$

при некотором $k = 0, 1, \dots, m-1$. Тогда из открытости множеств G_{r_i} следует

$$\delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_{G_{r_i}}) = 0, \quad i \geq k+1.$$

С другой стороны, учитывая соотношения

$$\lambda(G_{r_i}) \subset G_{r_{i+1}},$$

имеем

$$\delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_{G_{r_i}}) = 0, \quad i \leq k-1, \quad k > 0.$$

В итоге получаем

$$(4.34) \quad \begin{aligned} & \delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_{G_{r_{i+1}} \setminus G_{r_i}}) \\ & \leq \delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}}) + \delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_{G_{r_i}}) = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \neq k, k-1. \end{aligned}$$

Из (4.25) и (4.33) вытекает $p(x) = f(r_k)$. Имеем также $\delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_B) = 0$. Отсюда следует

$$(4.35) \quad \delta_{\mathcal{Q}}(x, p) = \delta_{\mathcal{Q}}(x, p - f(r_k)\mathbb{I}_B).$$

Имеем

$$p(x) - f(r_k)\mathbb{I}_B(x) = (1 - f(r_k))\mathbb{I}_{G_{r_0}}(x) + \sum_{i=0}^m (f(r_i) - f(r_k))\mathbb{I}_{G_{r_{i+1}} \setminus G_{r_i}}(x).$$

Далее, имея в виду (4.31) и (4.34), получим

$$\delta_{\mathcal{Q}}(x, p - f(r_k)\mathbb{I}_B) \leq \sum_{i \in \mathbb{N} \cap \{k-1, k\}} (f(r_i) - f(r_k))\delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_{G_{r_{i+1}} \setminus G_{r_i}}(x)) \leq 2\varepsilon$$

Комбинируя это с (4.32) и (4.35), получим $\delta_{\mathcal{Q}}(x, h) = 0$.

Случай 3: $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B$. Из соотношений $\lambda(G_{r_i}) \subset G_{r_m} = B$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_{G_{r_{i+1}} \setminus G_{r_i}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-2,$$

и следовательно, с учетом (4.25), (4.31) и равенства $f(r_m) = 0$, получим

$$\delta_{\mathcal{Q}}(x, p) = |f(r_{m-1})|\delta_{\mathcal{Q}}(x, \mathbb{I}_{G_{r_m} \setminus G_{r_{m-1}}}) < \varepsilon.$$

Это завершает доказательство (4.20). Лемма доказана. $\square$

Лемма 11. Для любого нуль-множества $E \subset \mathbb{R}^2$ типа G_δ , существует функция $g(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая условиям

- a) $0 \leq g(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^2$,
- b) $\delta_{\mathcal{Q}}(x, g) = 0$ в каждой точке $x \in E^c$,
- c) $\delta_{\mathcal{Q}}(x, g) = 1$ в каждой точке $x \in E$.

Доказательство. Имеем

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где E_k — некоторые открытые множества. Построим функции $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, открытые множества G_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям

- 1) $E \subset G_k \subset E_k$, $G_k \subset G_{k-1}$, $k \geq 1$ ($G_0 = \mathbb{R}^2$),
- 2) $g_k(x) = 1$, $x \in G_k$, $k \geq 1$,
- 3) $g_k(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus G_{k-1}$, $k \geq 1$,
- 4) $0 \leq g_k(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^2$, $k \geq 1$,
- 5) $\frac{1}{|Q|} \int_Q g_k(t) dt < 2^{-k}$, $Q \in \mathcal{Q}$, $\overline{Q} \not\subset G_{k-1}$,
- 6) $\delta_{\mathcal{Q}}(x, g_k) = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$,

Сделаем эти построения по индукции. Возьмем $G_0 = \mathbb{R}^2$. Применив лемму 10 при $G = G_0$ и $\varepsilon = 1/2$, найдем функцию $h(x)$, и открытое множество A , удовлетворяющие условиям леммы. Обозначим $g_1(x) = h(x)$ и $G_1 = A \cap E_1$.

Легко проверить, что тогда будут выполнены условия 1)-6) при $k = 1$. Предположим, что уже выбрали множества G_k и функции $g_k(x)$, с условиями 1)-6) при $k = 1, 2, \dots, p$. Далее, вновь применив лемму 10 при $G = G_p$ и $\varepsilon = 2^{-p-1}$, найдем функцию $h(x)$ и открытое множество A , удовлетворяющие условиям той же леммы. Обозначив $g_{p+1}(x) = h(x)$ и $G_{p+1} = A \cap E_{p+1}$ мы получим

$$\begin{aligned} \text{supp } g_{p+1} &\subset G_p, \\ g_{p+1}(x) &= 1, \quad x \in G_{p+1}, \\ 0 &\leq g_{p+1}(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q g_{p+1}(t) dt \right| &< 2^{-p-1}, \quad Q \in \mathcal{Q}, \quad \overline{Q} \not\subset G_p, \\ \delta_{\mathcal{Q}}(x, g_{p+1}) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что тогда будут выполнены также условия 1)-6) при $k = p+1$, что и завершает процесс индукции. Из 1) следует, что

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Определим

$$(4.36) \quad g(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} g_k(x), & \text{при } x \in \mathbb{R}^2 \setminus E, \\ 0, & \text{при } x \in E, \end{cases}$$

Отметим, что ряд в (4.36) сходится если $x \notin E$. Из соотношений 1), 2) и 3) легко следует условие а) леммы, Если $x \notin E$, то имеем

$$(4.37) \quad x \in G_{k-1} \setminus G_k,$$

для некоторого $k = 1, 2, \dots$, а это значит, что

$$(4.38) \quad g_i(x) = 0, \quad i > k.$$

Возьмем любую точку x с условием (4.37) и пусть $Q \ni x$ есть произвольный квадрат. Из соотношения 5) и (4.38) следует

$$\frac{1}{|Q|} \left| \int_Q g_i(t) dt - g_i(x) \right| = \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q g_i(t) dt \right| < 2^{-i}, \quad i > k,$$

откуда, с учетом 6), легко получить

$$(4.39) \quad \delta_{\mathcal{Q}}(x, g) = \delta_{\mathcal{Q}} \left(x, \sum_{i=m}^{\infty} (-1)^i g_i \right) < \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}, \quad \text{при } m > k.$$

Так как $m \in \mathbb{N}$ может быть произвольным числом, то получим условие б) леммы.

Чтобы установить условие с), предположим $x \in E$. Тогда имеем $x \in G_k$, $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что существуют последовательность квадратов Q_k таких, что

$$\overset{\circ}{Q}_k \subset G_k, \quad \overline{Q}_k \not\subset G_k.$$

Отсюда, с учетом 2) и 5), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} g_i(t) dt &= 1, \quad i \leq k, \\ \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} g_i(t) dt &< 2^{-i}, \quad i > k. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} g(t) dt - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \right| \\ \leq \sum_{i=1}^k \left| \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} g_i(t) dt - 1 \right| + \sum_{i=k+1}^{\infty} \left| \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} g_i(t) dt \right| \\ \leq k \cdot 2^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-k}. \end{aligned}$$

Так как сумма $\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1}$ принимает значения 0 и 1 по очереди, то получаем условие с) для любой точки $x \in E$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что достаточно установить часть необходимости в случае $p = 1$, а часть достаточности в случае $p = \infty$.

Необходимость: Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ есть произвольная функция. Во первых отметим, что совершенно аналогично доказательству необходимой части теоремы 1 можно установить, что $U_Q(f)$ является множеством типа G_δ . Далее, рассмотрим множества

$$(4.40) \quad A_{n,m}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists Q, Q' \in \mathcal{Q}, x \in Q \cap Q', \\ \text{diam}(Q) < 1/n, \text{diam}(Q') < 1/n, \left| \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t) dt - \frac{1}{|Q'|} \int_{Q'} f(t) dt \right| > \frac{1}{m} \}.$$

Из соображений непрерывности, легко проверить, что они являются открытыми. Докажем, что

$$(4.41) \quad A(f) = \cup_{m \geq 1} \cap_{n \geq 1} A_{n,m}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_Q(x, f) > 0\}.$$

Для этого проверим эквивалентность следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x \in A(f), &\Leftrightarrow \exists m_0, \text{ так что } x \in A_{n,m_0}(f), \text{ при любом } n = 1, 2, \dots \\ &\Leftrightarrow \exists Q_k, Q'_k \in \mathcal{Q}, \text{diam}(Q_k) \rightarrow 0, \text{diam}(Q'_k) \rightarrow 0, \\ &\quad \left| \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(t) dt - \frac{1}{|Q'_k|} \int_{Q'_k} f(t) dt \right| > \frac{1}{m_0}, \\ &\Leftrightarrow \delta_Q(x, f) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.41) получим, что $\{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_Q(x, f) > 0\}$ является множеством типа $G_{\delta\sigma}$. Имеем

$$B_Q(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_Q(x, f) > 0\} \setminus U_Q(f),$$

и $U_Q(f)$ является множеством типа G_δ . Отсюда следует, что $B_Q(f)$ есть множество типа $G_{\delta\sigma}$. То, что оно имеет меру нуль, следует из теоремы D.

Достаточность: Предположим, что E есть множество типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль и представим его в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где E_k -множества типа G_{δ} меры нуль. Очевидно можно предполагать, что $E_k \subset E_{k+1}$. В противном случае могли бы рассматривать множества

$$E'_k = \bigcup_{j=1}^k E_j$$

которые тоже являются множествами типа $G_{\delta\sigma}$ и их объединение равно E . Применив лемму 11, найдем функции $g_k(x)$, такие, что

- а) $0 \leq g_k(x) \leq 1$,
- б) $\delta_{\mathcal{Q}}(x, g_k) = 0$ в каждой точке $x \notin E_k$,
- с) $\delta_{\mathcal{Q}}(x, g_k) = 1$ для любой точки $x \in E_k$.

Обозначим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} g_k(x)$$

Из войства а) следует, что $f \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$. Пусть $x \in E$. Для некоторого k имеем

$$x \in E_k \setminus E_{k-1}.$$

Отсюда вытекает

$$(4.42) \quad \delta_{\mathcal{Q}} \left(x, \sum_{i=1}^{k-1} 4^{-i} g_i \right) = 0,$$

$$(4.43) \quad \delta_{\mathcal{Q}}(x, g_k) = 1,$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{Q}}(x, f) &= \delta_{\mathcal{Q}} \left(x, \sum_{i=k}^{\infty} 4^{-i} g_i \right) \geq 4^{-k} \delta_{\mathcal{Q}}(x, g_k) - \delta_{\mathcal{Q}} \left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{-i} g_i \right) \\ &\geq 4^{-k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{-i} > 0. \end{aligned}$$

Если же $x \notin E$, то имеем $x \notin E_i$, $i = 1, 2, \dots$. При любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$, с учетом свойств а)-с), следует

$$\delta_{\mathcal{Q}}(x, f) = \delta \left(x, \sum_{i=k}^{\infty} 4^{-i} g_i \right) \leq \sum_{i=k}^{\infty} 4^{-i}.$$

Так как последнее имеет место при любом k , то получим $\delta_{\mathcal{Q}}(x, f) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3. Необходимость утверждения аналогично доказательству необходимости предыдущей теоремы. Приступим к доказательству достаточности. Будем воспользоваться функциями $g_k(x)$, построенные в начале доказательства леммы 11. Не трудно выяснить, что в месте условиями 1)-6)

можно также гарантировать условие $|G_k| < 4^{-k}$. Определим функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

Очевидно, что она принадлежит всем пространствам $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$. Из соотношения 2) сразу же следует, что $\delta_Q(x, f) = \infty$ при $x \in E$. Если же $x \notin E$, то имеем (4.37) и (4.38). Возьмем любую точку x с условием (4.37) и пусть $Q \ni x$ есть произвольный квадрат. Из соотношения 5) и (4.38) следует

$$\frac{1}{|Q|} \left| \int_Q g_i(t) dt - g_i(x) \right| = \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q g_i(t) dt \right| < 2^{-i}, \quad i > k,$$

откуда, с учетом 6), легко получить

$$(4.44) \quad \delta_Q(x, f) = \delta_Q \left(x, \sum_{i=m}^{\infty} g_i \right) < \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}, \quad \text{при } m > k,$$

которое устанавливает $\delta_Q(x, f) = 0$. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Besicovitch A. S., On differentiation of Lebesgue double integrals, *Fund. Math.*, **25**, 209–216.(1935)
- [2] Бугадзе В. М., О расходимости рядов Фурье-Уолша ограниченных функций на множествах меры нуль, *Мат. сборник*, **185**, no. 7, 119–127. (1994)
- [3] Бугадзе В. М., О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль, *Мат. заметки*, **51**, no. 5, 20–26.(1992)
- [4] Буздалин В. В., О неограниченно расходящихся тригонометрических рядах Фурье от непрерывных функций, *Мат. заметки*, **7**, no. 1, 7–18.(1970)
- [5] Буздалин В. В., Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящиеся на заданном множестве, *Математический сборник*, **95(137)**, no. 1(9), 84–107.(1974)
- [6] Goginava U., On devergence of Walsh-Fejer means of bounded functions on sets of measure zero, *Acta Math. Hungarica*, **121**, no. 3, 359–369. (2008)
- [7] М. Гусман, Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$, Мир, Москва.(1978)
- [8] Hahn H., Ueber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge, *Arch. d. Math. u. Phys.*, **28**, 34–45.(1919)
- [9] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, Note of differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, **25**, 217–237.(1935)
- [10] Kahane J-P., Katznelson Y., Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques, *Studia math.*, **XXVI**, 305–306.(1966)
- [11] Karagulyan G. A., Divergence of general localized operators on the sets of measure zero, *Colloq. Math.*, **121**, no. 1, 113–119.(2010)
- [12] Карагулян Г. А., Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара, *Известия НАН Армении, сер. Математика*, **45**, no. 6, 33–50.(2010)
- [13] Карагулян Г. А., О характеристике множеств точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации, *Матем. сб.*, **202**, no. 1, 11–36.(2011)
- [14] Карагулян Д. А., О характеристике множеств точек неограниченной расходимости рядов по системе Франклина, *Изв. НАН Армении, сер. Математика*, **47**, no. 1, 23–30.(2012)
- [15] Карагулян Д. А., О множествах точек неограниченной расходимости рядов по ортонормированным базисам, *Изв. НАН Армении, сер. Математика*, **47**, no. 5, 39–48.(2012)
- [16] Kolesnikov S. V., On the sets of non-existence of radial limits of bounded analytical functions, *Math. Sbornik*, **185**, no. 4, 91–100.(1994)
- [17] Коллингвуд Э. , Ловатер А. , Теория предельных множеств, М., Мир.(1971)
- [18] Kolmogoroff A. N.. Une serie de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, *Fund. Math.*, no. 4, 324–328.(1923)
- [19] Korner T. W., Sets of divergence for Fourier series, *Bull. Lond. Math. Soc.*, no. 3, 152–154.(1971)

- [20] Lebesgue H., Sur l'intégration des fonctions discontinues, Ann. Ecole Norm., **27**, 361–450, (1910).
- [21] Лукашенко С. Ю., О структуре множеств расходимости тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша, Докл. АН СССР, **253**, no. 3, 528–529.(1980)
- [22] Лунина М. А., О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара, Вестн. Моск. ун-та. Серия 1, Мат. мех., no. 4, 13–20.(1976)
- [23] Прохоренко В. И., О расходящихся рядах по системе Хаара, Изв. вузов. Мат., no. 1, 62–68.(1971)
- [24] S. Saks, Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral, Fund. Math., **22**, 257–261.(1934)
- [25] Sierpinski W., Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues, Fund. Math., no. 2, 41–49.(1921)
- [26] Стечкин Б. С., О сходимости и расходимости тригонометрических рядов, Успехи матем. наук, VI, **42**, no. 2, 148–149.(1951)
- [27] Тайков Л. В., О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе, Успехи матем. наук, XVIII, **113**, no. 5, 191–198.(1963)
- [28] Ульянов П. Л., О расходимости рядов Фурье, Успехи Мат. Наук, **12**, no. 3, 75–132.(1957)
- [29] Ульянов П. Л., А. А. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье, Успехи мат. наук, **38**, no. 4, 57–100.(1983)
- [30] Хеладзе Ш. В., О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленкина, Труды Тбилисского матем. института АН Груз. ССР, **58**, 225–242.(1978)
- [31] Хеладзе Ш. В., О расходимости всюду рядов Фурье-Уолша, Сообщ. АН Груз. ССР, **77**, no. 2, 305–307.(1975)
- [32] Wade W. R., Recent development in the theory of Walsh series, Internat. Journ. of Math. and Math. Sci., **5**, no. 4, 625–673.(1982)
- [33] Zahorski Z., Sur l'ensemble des points des non-derivative d'une fonction continue, Bulletin de la S. M. F., **74**, 147–178.(1946)
- [34] Zeller K., Ueber Konvergenzmengen von Fourierreihen, Arch. Math., **6**, 335–340.(1955)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН АРМЕНИИ, АРМЕНИЯ, ЕРЕВАН, п-кт МАРШАЛА БАГРАМЯН, 24/5, 0019,

E-mail address: g.karagulyan@yahoo.com

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, АРМЕНИЯ, ЕРЕВАН, АЛЕК МАНУКЯН, 1, 0049,

E-mail address: davidkar89@yahoo.com