ПОЛНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖЕСТВ ТОЧЕК РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА

Г. А. КАРАГУЛЯН

Аннотация. В работе доказывается Теорема: Для того, чтобы $E \subset [0,1]$ было множеством точек расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции $f \in L^\infty[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль.

Для функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

множество $E \subset [0,1]$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in [0,1] \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограничена, то скажем, что E является множеством точек неограниченной расходимости ряда (1). Хорошо известна классическая теорема Хана-Серпинского (см. [14], [7]): для того чтобы $E \subset [0,1]$ стало множеством точек расходимости (неограниченной расходимости) некоторого ряда (1), с непрерывными членами $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$ (G_δ).

В 1910г. А. Хаар (см. [6] или [10] часть 3.4) доказал, что ряды Фурье-Хаара непрерывных функций сходятся равномерно, и что для произвольных рядов Фурье-Хаара имеет место сходимость почти всюду. Отсюда ясно, что множества точек расходимости рядов Фурье-Хаара могут иметь только нулевые меры. Класс множеств неограниченной расходимости рядов Фурье-Хаара полностью была охарактеризована в работе М. А. Лунины [12]. Там доказывается, что во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа $\tilde{G}_\delta$, и наоборот любое множество типа $\tilde{G}_\delta$ может стать множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции. При этом эта функция может иметь сколь угодно медленно растущую функцию распределения.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 42A20.

Key words and phrases. ряды Фурье-Хаара, множества расходимости, множества $G_{\delta\sigma}$.

Отметим, что более ранней работе В. И. Прохоренко [13] было установлено существование функции $f(x) \in \cap_{1\le p<\infty} L^p$ ряд Фурье-Хаара которой неограниченно расходится на данном множестве E меры нуль, а в 1992 В. М. Бугадзе [1] доказал, что для любого множества меры нуль существует функция из класса $L^\infty[0,1]$ ряд Фурье-Хаара которой расходится на этом множестве.

Аналогичные задачи рассмотрены также для тригонометрических рядов Фурье ([15], [16], [8], [3], [4],[20]) а также для рядов Фурье по системе Уолша([18], [19], [2], [5]). Мы не будем обсуждать результаты этих работ. Отметим лишь работу Целлера [20], где дается полная характеристика множеств точек неограниченной расходимости тригонометрических рядов Фурье, основываясь на знаменитом примере А. Н. Колмогорова [11]. В нем доказывается, что для любого множества $E \subset [0,2\pi]$ типа G_δ существует ряд Фурье, который неограниченно расходится в каждой точке E и сходится в каждой точке его дополнения. Отметим, что вопрос о характеризации множеств точек (ограниченной) расходимости рядов Фурье остается открытой. Об этой а также о других задачах аналогичного характера обсуждается в обзорной статье П. Л. Ульянова [17].

И наконец отметим, что недавно в работе [9] установлена теорема общего характера из которой следуют некоторые из результатов упомянутых выше работ. В ней доказывается, что если последовательность линейных операторов $U_n : L^1 \to L^\infty$ обладает свойством локализации, то для любого множества E меры нуль существует функция $f \in L^\infty$, для которой $U_nf(x)$ расходится в каждой точке E.

В настоящей работе доказывается

Теорема. *Для того чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством точек расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции $f \in L^\infty[0,1]$, необходимо и достаточно, чтобы оно было $G_{\delta\sigma}$-множеством меры нуль.*

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x),\ n = 1,2,\ldots\}$ (см. [10] часть 3.1). Если ω есть некоторый интервал с концами α и β , то обозначим $\mathring{\omega} = (\alpha,\beta)$, $\bar\omega = [\alpha,\beta]$. Двоичными интервалами назовем интервалы вида

$$\omega_k^i = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad k = 0,1,\ldots .$$

Первая функция Хаара определяется $\chi_1(x) \equiv 1$, а при $n \ge 2$ имеем

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \omega_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \omega_{k+1}^{2i}, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \bar\omega_k^i, \end{cases} \tag{2}$$

если $n = 2^k + i,\ 1 \le i \le 2^k,\ k = 0,1,2\dots$, а в точках разрыва функция $\chi_n(x)$ определяется равенствами

$$\chi_n(x) = \frac{1}{2}(\chi_n(x+) + \chi_n(x-)), \quad x \in (0,1),$$
$$\chi_n(0) = \chi_n(0+), \quad \chi_n(1) = \chi_n(1-).$$

Через $S_n(x,f)$ обозначим n-ую частичную сумму ряда Фурье-Хаара функции $f \in L^1[0,1]$. Если $\omega = (\alpha,\beta)$ есть некоторый двоичный интервал из $[0,1]$, то обозначим

$$\omega_- = \begin{cases} (2\alpha-\beta,\alpha) & \text{при} \quad \alpha \ne 0, \\ \varnothing & \text{при} \quad \alpha = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\omega_+ = \begin{cases} (\beta,2\beta-\alpha) & \text{при} \quad \beta \ne 1, \\ \varnothing & \text{при} \quad \beta = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что если ω_- и ω_+ непустые, то они являются двоичными интервалами смежные для ω, и при этом $|\omega_+| = |\omega_-| = |\omega|$. Формулы для частичных сумм $S_n(x,f)$ соответствующие номерам $n = |\omega|^{-1} = 2^k$ можно записывать в виде

$$\begin{aligned} S_{|\omega|^{-1}}(x,f) &= \frac{1}{|\omega|}\int_\omega f(t)dt, \quad x \in \omega, \\ S_{|\omega|^{-1}}(\alpha,f) &= \frac{1}{|\omega \cup \omega_-|}\int_{\omega\cup\omega_-} f(t)dt, \\ S_{|\omega|^{-1}}(\beta,f) &= \frac{1}{|\omega \cup \omega_+|}\int_{\omega\cup\omega_+} f(t)dt. \end{aligned} \tag{5}$$

где $\omega = (\alpha,\beta) \subset [0,1]$ есть двоичный интервал (см. [10], часть 3.1).

Мы будем иметь дело с множествами из метрического пространства $[0,1]$. Открытыми в нем будут множества, которые представимы в виде $G\cap[0,1]$, где G-открытое множество в $\mathbb{R}$. Множества, которые можно представить в виде счетного пересечения открытых множеств отрезка $[0,1]$, называются множествами типа G_δ. Всевозможные счетные объединения множеств G_δ дает класс множеств типа $G_{\delta\sigma}$. В вышеупомянутой теореме Лунини были рассмотрены множества типа $\tilde{G}_\delta$. Этот класс чуть шире класса множеств типа G_δ. Множества этого класса являются счетными пересечениями множеств, представимые в виде

$$G = \big(\cup_k (a_k,b_k)\big) \cup A,$$

где $\{(a_k,b_k)\}$-конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся интервалов, а A составлено из некоторых двоично рациональных точек, содержащиеся в множестве $\{a_k,b_k\}$. В нашей теореме искажение от обычных $G_{\delta\sigma}$ множеств не будет. Причина в том, что счетные пересечения множеств типа $\tilde{G}_\delta$ в точности совпадает с классом множеств типа $G_{\delta\sigma}$, и это мы увидим в низу, при доказательстве теоремы.

Если $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, то обозначим

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{|J|\to 0:\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J f(t)dt, \quad \underline{D}f(x) = \liminf_{|J|\to 0:\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J f(t)dt$$

где J является интервалом в $\mathbb{R}$. Если имеем $\overline{D}f(x) = \underline{D}f(x)$, то эту величину обозначим через $Df(x)$. Если $A \subset [0,1]$ есть некоторое измеримое множество, то обозначим

$$\lambda(A) = A \cup \left\{ x \in [0,1] : \overline{D}\mathbb{I}_A(x) = \limsup_{|J|\to 0:\, x\in J} \frac{|A\cap J|}{|J|} > 0 \right\},$$

По теореме Лебега имеем $Df(x)$ существует и равно $f(x)$ почти всюду, из которого следует, что для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$ имеет место равенство $|\lambda(A)\setminus A| = 0$. Если I есть некоторый интервал, то через kI обозначим интервал концентрический с I, имеющий длину $k|I|$.

Лемма 1. *Если $\varepsilon > 0$ и $A \subset \Delta = (a,b)$ есть измеримое множество, то существует открытое множество G такое, что*

$$A \subset G \subset \Delta, \tag{6}$$

$$|G\cap J| \le |A \cap 4J| + \varepsilon|J|^2 \tag{7}$$

для любого интервала J, с $J \not\subset \Delta$.

Доказательство. Полуинтервалы

$$I_0 = \left[a + \frac{b-a}{4}, b - \frac{b-a}{4}\right), \; I_k = \left[b - \frac{b-a}{2^{k+1}}, b - \frac{b-a}{2^{k+2}}\right),$$
$$I_{-k} = \left[a + \frac{b-a}{2^{k+2}}, a + \frac{b-a}{2^{k+1}}\right), \quad k = 1,2,\ldots.$$

дают разбиение интервала $\Delta = (a,b)$. Очевидно существуют открытые множества E_k такие, что

$$A\cap I_k \subset E_k \subset I_k \cup I_{k-1} \cup I_{k+1}, \quad |E_k| \le |A\cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16}|I_k|^2. \tag{8}$$

Обозначим

$$G = \bigcup_k E_k.$$

Пусть $J \not\subset (a,b)$ есть некоторый интервал. Если $J \cap (a,b) = \varnothing$, то (7) очевидно. В случае $(a,b) \subset J$ имеем

$$|G \cap J| = |G| \le \sum_k |E_k| \le \sum_k |A \cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16} \sum_k |I_k|^2 \le |A \cap J| + \frac{\varepsilon}{16} |J|^2$$

и получим (7). Итак, без ограничения общности можно предполагать $a \in J$, $b \notin J$. Пусть $m \in \mathbb{Z}$ есть максимальное число удовлетворяющее условию $E_m \cap J \neq \varnothing$. Для такого m очевидно имеем

$$\bigcup_{k \le m} I_k \subset 4J. \tag{9}$$

Отсюда, с учетом (8), получим

$$|G \cap J| \le \sum_{k \le m} |E_k| \le \sum_{k \le m} |A \cap I_k| + \frac{\varepsilon}{16} \sum_{k \le m} |I_k|^2 \le |A \cap 4J| + \varepsilon |J|^2.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Если $B \subset \mathbb{R}$ есть открытое, а $A \subset B$ измеримое множества, с $\lambda(A) \subset B$, $0 \le |A| < |B|$, то существует другое открытое множество $G \subset B$ такое, что*

$$\lambda(A) \subset G, \quad \lambda(G) \subset B, \tag{10}$$

$$|G| = \frac{|A| + |B|}{2}. \tag{11}$$

Доказательство. Предположим

$$B = \bigcup_k \Delta_k,$$

где $\{\Delta_k = (a_k, b_k),\ k = 1, 2, \ldots\}$-конечное или счетное семейство попарно не пересекающиеся интервалов. Обозначим

$$A_k = A \cap \Delta_k.$$

Из соотношения $\lambda(A) \subset B$ следует $\lambda(A_k) \subset \Delta_k$. Поэтому, применив лемму 1, можно определить открытые множества G_k такие, что справедливы соотношения

$$\lambda(A_k) \subset G_k \subset \Delta_k, \quad |G_k \cap J| \le |A_k \cap 4J| + |\Delta_k||J|^2 \tag{12}$$

для любого интервала J, с $J \not\subset \Delta_k$. При этом очевидно дополнительно можно предполагать также, что

$$|G_k| < |A_k| + \frac{|B \setminus A|}{2^{k+1}}. \tag{13}$$

Существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{p} |\Delta_k| > \frac{|A| + |B|}{2}. \tag{14}$$

Если семейство $\{\Delta_k\}$ конечно, то берем p равным количеству интервалов Δ_k. Обозначим

$$G(t) = \left(\bigcup_k G_k\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{p} (t\Delta_k)\right), \quad 0 \le t \le 1. \tag{15}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = |G(t)|$. С учетом (13) и (14), имеем

$$f(0) = \sum_k |G_k| < \sum_k |A_k| + |B \setminus A| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{|A| + |B|}{2},$$

$$f(1) > \sum_{k=1}^{p} |\Delta_k| > \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Отсюда и из непрерывности $f(t)$ следует, что для некоторого $0 < t_0 < 1$ имеет место равенство

$$|G(t_0)| = \frac{|A| + |B|}{2},$$

т.е. множество $G = G(t_0)$ удовлетворяет условию (11). Докажем первое из соотношений (10). Если $x \in \lambda(A)$, то имея в виду включение $\lambda(A) \subset B$, имеем $x \in \lambda(A) \cap \Delta_k$ при некотором k. Отсюда легко усмотреть, что $x \in \lambda(A_k) \subset G_k \subset G$ и получим $\lambda(A) \subset G$. Остается доказывать $\lambda(G) \subset B$. Возьмем произвольную точку $x \notin B$. Так как $0 < t_0 < 1$, имеем

$$x \notin \overline{\bigcup_{k=1}^{p} (t_0\Delta_k)}.$$

Следовательно, если интервал $J \ni x$ имеет достаточно малую длину, то, с учетом (15), получаем

$$G \cap J = \left(\bigcup_k G_k\right) \bigcap J.$$

Отсюда и из неравенств (12) и (13) вытекает

$$\begin{aligned} |G \cap J| &= \sum_k |G_k \cap J| \\ &\le \sum_k |A_k \cap 4J| + |J|^2 \sum_k |\Delta_k| \le |A \cap 4J| + |B||J|^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Так как $x \notin \lambda(A)$ имеем

$$\lim_{|J|\to 0} \frac{|A \cap 4J|}{|J|} \to 0,$$

которое в месте (16) дает

$$\lim_{|J|\to 0} \frac{|G \cap J|}{|J|} \to 0,$$

а это значит, что $x \notin \lambda(G)$. Лемма доказана. □

Рассмотрим семейство открытых множеств $\{G_r : r \in E\}$, где $E \subset \mathbb{R}$-некоторое множество индексов. Скажем, что это семейство является цепью, если $\lambda(G_r) \subset G_{r'}$ при любых $r, r' \in E$, с $r < r'$.

Лемма 3. *Если A и B-открытые множества в $\mathbb{R}$, с условиями $\lambda(A) \subset B$ и $\alpha = |A| < |B| = \beta$, то существует цепь открытых множеств $\{G_r : \alpha \leq r \leq \beta\}$ такая, что*

$$G_\alpha = A,\ G_\beta = B, \quad |G_r| = r. \tag{17}$$

Доказательство. Определим $G_\alpha = A$, $G_\beta = B$ и применим лемму 2 над парой открытых множеств G_α, G_β. Этим определяется открытое множество $G = G_{(\alpha+\beta)/2}$, с условиями (10) и (11), а это означает, что множества

$$G_\alpha, G_{(\alpha+\beta)/2}, G_\beta$$

образуют цепь. Далее, продолжим рассуждения по индукции. Обозначим

$$\mathcal{D}_k[\alpha,\beta] = \{\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{2^k},\ 0 \leq i \leq 2^k\},$$

и предположим, что уже выбраны множества G_r, для всех $r \in \mathcal{D}_k[\alpha,\beta]$, при этом они образуют цепь и $|G_r| = r$. Каждое из множеств $G_{(2i+1)/2^{k+1}}$, $0 \leq i \leq 2^k - 1$ получается очередным применением леммы 2 над парой множеств $G_{i/2^k}$, $G_{(i+1)/2^k}$. Ясно, что полученная таким путем семейство $\{G_r,\ r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha,\beta]\}$ тоже будет цепью. При этом сохраняется свойство $|G_r| = r$ теперь уже при $r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha,\beta]$. В самом деле, имеем

$$|G_{(2i+1)/2^{k+1}}| = \frac{1}{2}(|G_{i/2^k}| + |G_{(i+1)/2^k}|) = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k}\right) = \frac{2i+1}{2^{k+1}}.$$

Продолжив этот процесс, получим семейство множеств G_r, определенные при всех

$$r \in \mathcal{D} = \left\{\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{2^k},\ 0 \leq i \leq 2^k,\ k = 0, 1, \ldots\right\},$$

которое будет цепью и $|G(r)| = r$. Если же $r \in [\alpha, \beta]$-произвольное число, то определим

$$G(r) = \bigcup_{r' \in \mathcal{D}:\, r' < r} G(r'), \quad r \in [\alpha, \beta].$$

Легко проверить, что $\{G(r) : r \in [\alpha, \beta]\}$ станет цепью и удовлетворяет условию (17). Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть открытые множества $A \subset B \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\alpha = |A| < |B| = \beta$ и $\lambda(A) \subset B$. Тогда, если $f(x) \in C[0, \beta]$ и $f(x) = 1$ при $x \in [0, \alpha]$, то существует функция $h(x)$, $x \in B$ такая, что*

$$h(x) = 1,\ x \in A, \tag{18}$$

$$|\{x \in B : h(x) > t\}| = |\{x \in [0, \beta] : f(x) > t\}|, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

$$Dh(x) = h(x) \text{ в каждой точке } x \in B. \tag{20}$$

Доказательство. Согласно лемме 3, существует цепь открытых множеств $\{G(r) : r \in [\alpha, \beta]\}$, удовлетворяющая условиям

$$G_\alpha = A,\ G_\beta = B, \quad |G_r| = r.$$

Определим функцию

$$\tau(x) = \inf\{r : x \in G_r\}, \quad x \in B \setminus A,$$

которая отображает множество $B \setminus A$ на $[\alpha, \beta]$. Легко проверить соотношение

$$\tau(x) \le c \Leftrightarrow x \in \bigcap_{r > c} G_r,$$

из которого следует

$$\tau^{-1}(a, b] = \{x : a < \tau(x) \le b\} = \left(\bigcap_{r > b} G_r\right) \setminus \left(\bigcap_{r > a} G_r\right).$$

Отсюда, в силу (17), вытекает $|\tau^{-1}(a, b]| = b - a$ и следовательно имеет место равенство

$$|\tau^{-1}(E)| = |E| \tag{21}$$

для любого открытого множества $E \subset [\alpha, \beta]$. Определим

$$h(x) = \begin{cases} f(\tau(x)) & \text{при} \quad x \in B \setminus A, \\ 1 & \text{при} \quad x \in A. \end{cases} \tag{22}$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\{x \in B \setminus A : h(x) > t\}| &= |\{x \in B \setminus A : f(\tau(x)) > t\}| \\ &= |\tau^{-1}\{x \in [\alpha, \beta] : f(x) > t\}| = |\{x \in [\alpha, \beta] : f(x) > t\}|. \end{aligned} \tag{23}$$

Последнее равенство следует из (21) и из того, что $\{x \in [\alpha, \beta] : f(x) > t\}$ есть открытое множество в $[\alpha, \beta]$. Так как функции $h(x)$ и $f(x)$ равны единице соответственно на множествах A и $[0, \alpha]$, причем $|A| = \alpha$, то из (23) получаем

$$|\{x \in B : \, h(x) > t\}| = |\{x \in [0, \beta] : \, f(x) > t\}|.$$

Остается проверить условие (20). Возьмем произвольную точку $x \in B = G_\beta$. В случае

$$x \in \bigcap_{r > \alpha} G_r,$$

имеем $x \in G_r$ для любого фиксированного $r > \alpha$. Из определения τ следует $\tau(t) < r$ при $t \in G_r$. Отсюда, учитывая (22), получаем, что числа 1 и $h(t)$ при $t \in G_r$ заключены между величинами

$$\inf_{t \in [0, r]} f(t), \quad \sup_{t \in [0, r]} f(t). \tag{24}$$

Из непрерывности $f(t)$ следует, что величины (24) стремятся к 1 при $r \to \alpha+$. Отсюда вытекает

$$\lim_{|J| \to 0, \, x \in J} \frac{1}{|J|} \int_J h(u) du = 1 = h(x),$$

так как $h(u) = 1$ на множестве $A = G_\alpha$. Если же

$$x \in G_\beta \setminus \left(\bigcap_{r > \alpha} G_r \right),$$

то имеем $x \in G_{r+\delta} \setminus G_r$ при некотором r и при этом $r - \delta > \alpha$. Из соотношений

$$\lambda(G_{r-\delta}) \subset G_r \text{ и } x \notin G_r$$

следует

$$\lim_{|J| \to 0, \, x \in J} \frac{|J \cap G_{r-\delta}|}{|J|} = 0. \tag{25}$$

Так как $G_{r+\delta}$ открыто и $x \in G_{r+\delta}$ имеем

$$\lim_{|J| \to 0, \, x \in J} \frac{|J \cap (G_\beta \setminus G_{r+\delta})|}{|J|} = 0.$$

Отсюда и из (25) получаем

$$\lim_{|J| \to 0, \, x \in J} \frac{|J \cap (G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta})|}{|J|} = 1. \tag{26}$$

С другой стороны

$$\inf_{t \in [r-\delta, r+\delta]} f(t) \le h(u) \le \sup_{t \in [r-\delta, r+\delta]} f(t), \quad u \in G_{r+\delta} \setminus G_{r-\delta}.$$

Отсюда, учитывая (26) и ограниченность функции $h(x)$, получим

$$\begin{aligned}
\overline{D}h(x) &= \limsup_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)du \\
&= \limsup_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)\cdot \mathbb{I}_{G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}}(u)du \\
&\le \sup_{t\in G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}} h(t) \le \sup_{t\in[r-\delta,r+\delta]} f(t).
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
\underline{D}h(x) &= \liminf_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)du \\
&= \liminf_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{1}{|J|}\int_J h(u)\cdot \mathbb{I}_{G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}}(u)du \\
&\ge \inf_{t\in G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}} h(t) \liminf_{|J|\to 0,\, x\in J} \frac{|J\cap (G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta})|}{|J|} \\
&= \inf_{t\in G_{r+\delta}\setminus G_{r-\delta}} h(t) \ge \inf_{t\in[r-\delta,r+\delta]} f(t),
\end{aligned}$$

В итоге получим

$$\inf_{t\in[r-\delta,r+\delta]} |f(t)| \le \overline{D}h(x),\, \underline{D}h(x),\, h(x) \le \sup_{t\in[r-\delta,r+\delta]} |f(t)|$$

В силу непрерывности $f(x)$ разность между правой и левой частями можно сделать сколь угодно малой выбором δ, а это значит $Dh(x) = h(x)$. □

Пусть $g(x)$ есть некоторая функция, определенная на $[a,b]$. Скажем, что значение $Dg(x)$ существует внутри $[a,b]$, если оно существует в обычном смысле при $x\in(a,b)$, а в точках a и b определяется равенствами

$$D^+g(a) = \lim_{u\to 0+}\frac{1}{u}\int_a^{a+u} g(t)dt, \quad D^-g(b) = \lim_{u\to 0+}\frac{1}{u}\int_{b-u}^{b} g(t)dt.$$

Лемма 5. *Если $A\subset\mathbb{R}$ есть открытое множество и $|A\cap[a,b]| < (b-a)/10$ для некоторого отрезка $[a,b]$, то существует функция $g(x)$, $x\in[a,b]$, такая, что*

$$g(x) = 1, \quad x\in A\cap[a,b], \tag{27}$$

$$|g(x)| \le 1, \quad x\in[a,b], \tag{28}$$

$$\int_a^b g(x)dx = 0, \tag{29}$$

$$Dg(x) = g(x), \text{ внутри } [a,b]. \tag{30}$$

Доказательство. Обозначим

$$I=(a,b),\ B=\frac{11}{10}\cdot I,\quad A'=A\cap\left(\frac{21}{20}\cdot I\right),\quad \alpha=|A'|,\quad \beta=|B|.$$

Имеем

$$\alpha\le\frac{b-a}{20}+|A\cap[a,b]|<\frac{b-a}{20}+\frac{b-a}{10}=\frac{3(b-a)}{20},\quad \beta=\frac{11(b-a)}{10}.$$

Исходя из этих неравенств, легко усмотреть, что существует функция $f\in C[0,\beta]$, для которой имеем

$$f(x)=1,\ x\in[0,\alpha], \tag{31}$$

$$-\frac{1}{2}\le f(x)\le 1,\quad x\in[0,\beta], \tag{32}$$

$$\int_0^\beta f(x)dx=0. \tag{33}$$

Так как $\lambda(A')\subset B$, применив лемму 4, найдем функцию $h(x)$, $x\in B$, которая удовлетворяет условиям (18)-(20). Из (19) следует, $h(x)$ обладает свойствами аналогичными (32) и (33), т.е. имеем

$$-\frac{1}{2}\le h(x)\le 1,\quad x\in B, \tag{34}$$

$$\int_B h(x)dx=0. \tag{35}$$

Определим

$$g(x)=\frac{h(x)+\gamma}{1+\gamma},\quad \gamma=\frac{1}{b-a}\int_{B\setminus[a,b]}h(t)dt. \tag{36}$$

Из (18) имеем (27), а из (20) следует (30). Из неравенства

$$|\gamma|\le\frac{|B\setminus[a,b]|}{b-a}=1/10$$

и (34) вытекает неравенства

$$g(x)\le 1,\quad g(x)\ge\frac{-1/2-1/10}{1-1/10}>-1,$$

из которых следует (28). Далее, из (35) и (36) получаем

$$\int_a^b g(x)dx=\frac{1}{1+\gamma}\left(\int_a^b h(t)dt+\gamma(b-a)\right)=\frac{1}{1+\gamma}\int_B h(t)dt=0,$$

которое дает (29). Лемма доказана. $\square$

Скажем, что семейство попарно непересекающихся двоичных полуоткрытых интервалов $\Omega = \{\omega_k = [\alpha_k, \beta_k)\}$ является двоичным разбиением открытого множества $G \subset \mathbb{R}$, если

$$G = \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega, \quad \operatorname{dist}(\omega, G^c) > 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Если Ω такое, что

$$1 \geq \frac{|\omega|}{\operatorname{dist}(G^c, \omega)} \to 0, \text{ при } \operatorname{dist}(G^c, \omega) \to 0,$$

то скажем, что оно является регулярным разбиением. Легко усмотреть, что любое открытое множество обладает регулярным двоичным разбиением. Пусть Ω' и Ω'' являются двоичными разбиениями открытых множеств G' и G'', с $G' \subset G''$. Обозначим $\Omega' < \Omega''$, если любой интервал $\omega'' \in \Omega''$, а также его две смежные интервалы с той же длины, не входят в целиком ни в один из интервалов $\omega' \in \Omega'$.

Лемма 6. *Пусть B есть открытое множество в $\mathbb{R}$, а $\Omega = \{\omega_k\}$ его регулярное разбиение на двоичные интервалы. Тогда, если открытое множество $A \subset B$ таково, что $\lambda(A) \subset B$ и*

$$|A \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega,$$

то существует измеримая функция $g(x)$, $x \in [0,1]$, такая, что

$$\operatorname{supp} g \in B \cap [0,1], \quad g(x) = 1,\ x \in A \cap [0,1], \tag{37}$$

$$|g(x)| \leq 1, \quad x \in [0,1], \tag{38}$$

$$\int_{\omega_k} g(x)dx = 0, \text{ если } \omega_k \subset [0,1], \tag{39}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,g) = g(x), \text{ в каждой точке } x \in [0,1]. \tag{40}$$

Доказательство. Предположим $\omega_k = [a_k, b_k)$. Обозначим $A_k = A \cap \omega_k$. Применив лемму 5 определим функции $g_k(x)$, $x \in \omega_k$, со свойствами

$$g_k(x) = 1,\ x \in A_k, \tag{41}$$

$$|g_k(x)| \leq 1, \quad x \in \omega_k, \tag{42}$$

$$\int_{\omega_k} g_k(x)dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{43}$$

$$Dg_k(x) = g_k(x), \text{ внутри } [a_k, b_k]. \tag{44}$$

Определим $g(x) = g_k(x)$, при $x \in \mathring{\omega}_k = (a_k, b_k) \subset (0,1)$, а если x является концом одного из интервалов ω_k, то предположим $g(x) = (D^+g(x) + D^-g(x))/2$ при $x \neq 0,1$, и $D^+g(x)$ или $D^-g(x)$ когда соответственно x равно 0 или 1. В точках $x \in [0,1] \setminus B$ определяется

$g(x) = 0$. Этим $g(x)$ будет корректно определена на $[0,1]$ и очевидно она удовлетворяет условиям (37)-(40). Проверке нуждается лишь свойство (40). Если $x \in B \cap [0,1]$ то либо имеем $x \in (a_k, b_k) \subset (0,1)$ либо x равно одному из a_k или b_k. В первом случае (40) немедленно следует из (44), а при $x = a_k, b_k$ надо также учитывать свойство системы Хаара, что $S_n(x,g) \to (D^+g(x) + D^-g(x)))/2$, если $D^+g(x)$ и $D^-g(x)$ существуют. Пусть теперь $x \in [0,1] \backslash B$, а $J \ni x$ некоторый интервал. Для любого интервала ω_k, кроме двух возможных $\omega_{k'}$ и $\omega_{k''}$, имеем либо $\omega_k \subset J$ либо $\omega_k \cap J = \varnothing$. Тогда из (42), (43) и регулярности разбиения Ω следует

$$\frac{1}{|J|}\left|\int_J g(t)dt\right| = \frac{1}{|J|}\left|\int_{J\cap\omega_{k'}} g_{k'}(t)dt + \int_{J\cap\omega_{k''}} g_{k''}(t)dt\right|$$
$$\le \frac{|\omega_{k'}|}{\operatorname{dist}(B^c, \omega_{k'})} + \frac{|\omega_{k''}|}{\operatorname{dist}(B^c, \omega_{k''})} \to 0$$

когда $|J| \to 0$. Отсюда следует, что (40) выполняется при всех $x \in [0,1]$. □

Лемма 7. *Если $E \subset [0,1]$ есть множество типа G_δ в $[0,1]$, имеющее меру нуль, то существуют конечное или счетное число открытых множеств $G_k \subset \mathbb{R}$, с регулярными двоичными разбиениями Ω_k, такие, что*

$$E = [0,1] \cap (\cap_k G_k)\,, \tag{45}$$

$$\Omega_{k+1} < \Omega_k, \quad \lambda(G_{k+1}) \subset G_k, \tag{46}$$

$$|G_{k+1} \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{47}$$

Доказательство. Имеем

$$E = [0,1] \bigcap \left(\bigcap_k E_k\right),$$

где $E_k \subset \mathbb{R}$-открытые множества. Множества G_k будут определены по индукции. Возьмем $G_1 = E_1$ и пусть Ω_1 есть произвольное регулярное двоичное разбиение множества G_1. Предположим, что уже выбраны множества G_k, с соответствующими двоичными разбиениями Ω_k, для $k = 1, 2, \ldots, p$, при этом они удовлетворяют условиям (46),(47) и дополнительно имеем $G_k \subset E_k$ при $k \le p$. Так как $|E| = 0$, имеем $\lambda(E) = E$. Применив лемму 2 для множеств $B = G_p$ и $A = E$, найдем множество G' такое, что $E \subset G'$ и $\lambda(G') \subset G_p$. Существует также множество $G'' \supset E$ такое, что

$$|G'' \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_p.$$

Возьмем $G_{p+1} = G' \cap G'' \cap E_{p+1}$. Очевидно имеем

$$\lambda(G_{p+1}) \subset \lambda(G') \subset G_p, \quad G_{p+1} \subset E_{p+1}$$

$$|G_{p+1} \cap \omega| \le |G'' \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_p.$$

В силу $G_{p+1} \subset G_p$ существует регулярное двоичное разбиение Ω_{p+1} множества G_{p+1} такое, что $\Omega_{p+1} < \Omega_p$. Итак полученная таким образом последовательность G_k в месте с разбиениями Ω_k удовлетворяют условиям (46), (47) и $E \subset G_k \subset E_k$, из которого следует (45). Лемма доказана. □

Лемма 8. *Для любого множества $E \subset [0,1]$ меры нуль, имеющее тип G_δ в $[0,1]$, существует функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям*

a) $|g(x)| \le 2$,

b) $S_n(x,g) \to g(x)$ в каждой точке $x \in [0,1] \setminus E$,

c) для любой точки $x \in E$ имеем

$$\delta(x,g) = \limsup_{n\to\infty} S_n(x,g) - \liminf_{n\to\infty} S_n(x,g) \ge 1.$$

Доказательство. Применив лемму 7, множество E можно представить в виде

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k \tag{48}$$

где $G_k \subset [0,1]$-открытые множества, которые в месте с некоторыми регулярными двоичными разбиениями Ω_k удовлетворяют условиям

$$\lambda(G_{k+1}) \subset G_k, \tag{49}$$

$$|G_{k+1} \cap \omega| < \frac{|\omega|}{10}, \quad \omega \in \Omega_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{50}$$

Для пары множеств $B = G_k$ и $A = G_{k+1}$ можно применить лемму 6. В итоге получим последовательность функций $g_k(x)$, $x \in [0,1]$, с условиями

$$\operatorname{supp} g_k \in G_k \cap [0,1], \quad g_k(x) = 1,\ x \in G_{k+1} \cap [0,1], \tag{51}$$

$$|g_k(x)| \le 1, \quad x \in [0,1], \tag{52}$$

$$\int_\omega g_k(x)dx = 0, \quad \omega \in \Omega_k, \quad \omega \subset [0,1], \tag{53}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,g_k) = g_k(x), \text{ в каждой точке } x \in [0,1]. \tag{54}$$

Будем предполагать $G_0 = [0,1]$. Во первых заметим, что при условии

$$x \in (G_k \setminus G_{k+1}) \cap [0,1], \quad k = 0, 1, \dots, \tag{55}$$

из (51) вытекает

$$g_i(x) = 1, \quad i < k, \quad g_i(x) = 0, \quad i > k, \tag{56}$$

$$S_n(x, g_i) = 0, \quad i > k. \tag{57}$$

Соотношения (56) сразу же следуют из (51). Докажем (57). Из (55) следует, что если $I \subset [0,1]$-некоторый двоичный интервал, с $x \in \bar{I}$, то для любого двоичного интервала $\omega \subset G_{k+1}$, в частности для интервалов $\omega \in \Omega_i$, $i > k$, либо $\omega \cap I = \varnothing$ либо $\omega \subset I$. Отсюда, с учетом (53), получаем равенство

$$\int_I g_i(t)dt = 0, \quad i > k, \tag{58}$$

из которого следует (57). Если $x \in [0,1] \setminus E$, то имеем (55) для некоторого $k = 0, 1, \dots$. Отсюда функция

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} g_k(x).$$

определена при $x \in [0,1] \setminus E$, т.е. почти всюду. Определим $g(x) = 0$ при $x \in E$. Если $x \in [0,1] \setminus E$, то имеем (55) при некотором $k = 0, 1, \dots$ и следовательно (56). Отсюда следует

$$|g(x)| = |\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} g_i(x) + (-1)^{k+1} g_k(x)|$$

$$\leq |\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1}| + |g_k(x)| \leq 2,$$

и получаем $|g(x)| \leq 2$, $x \in (0,1)$, что дает a). Далее вновь предположим $x \in [0,1] \setminus E$. Тогда имеем (55). Отсюда, с учетом (56) и (57), получаем

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} g_i(x), \quad S_n(x, g) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} S_n(x, g_i),$$

которое в месте с (54) дает b). Теперь пусть $x \in E$. Тогда имеем $x \in \bar{\omega}_k$ для некоторой последовательности $\omega_k \in \Omega_k$, $\omega_k \subset [0,1]$, $k = 1, 2, \dots$. Из (53), регулярности разбиений Ω_i и соотношения

$\Omega_i < \Omega_k$, $i > k$, следует

$$\int_{\omega_k} g_i(t)dt = \int_{\omega_k^+} g_i(t)dt = \int_{\omega_k^-} g_i(t)dt = 0, \quad i \geq k,$$
$$g_i(x) = 1, \quad x \in \omega_k \cup \omega_k^+ \cup \omega_k^-, \quad i < k.$$

Отсюда следует, что

$$S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) = 0, \quad i \geq k,$$
$$S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) = 1, \quad i < k.$$

Следовательно, имеем

$$S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} S_{|\omega_k|^{-1}}(x, g_i) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1},$$

а это значит, что

$$\delta(x, g) \geq 1, \quad x \in E. \tag{59}$$

Итак функция $g(x)$ удовлетворяет условиям a), b) и c) и лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы: Необходимость. Для данной функции $f \in L^1[0,1]$ рассмотрим множества

$$A_{n,m}(f) = \bigcup_{i,j>n} \left\{ x \in [0,1] : |S_i(x,f) - S_j(x,f)| > \frac{1}{m} \right\}. \tag{60}$$

Докажем, что множество

$$A(f) = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq 1} A_{n,m}(f)$$

в точности состоит из точек расходимости ряда Фурье-Хаара функции f. Для этого проверим эквивалентность следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x \in A(f), &\Leftrightarrow \exists m_0, \text{ так что } x \in A_{n,m_0}(f), \text{ при любом } n = 1, 2, \ldots \\ &\Leftrightarrow \exists m_0, \exists p_k, q_k \in \mathbb{N}, \text{ так что } p_k, q_k \to \infty, \text{ и} \\ &\qquad |S_{p_k}(x,f) - S_{q_k}(x,f)| > \frac{1}{m_0}, \\ &\Leftrightarrow S_n(x,f) \text{ расходится }. \end{aligned}$$

Отметим, что множества

$$\left\{ x \in [0,1] : |S_i(x,f) - S_j(x,f)| > \frac{1}{m} \right\}$$

можно представить в виде объединения конечного числа двоичных отрезков разного типа (открытых, замкнутых или полуоткрытых). Из этого следует, что

$$A_{n,m}(f) = G_{n,m} \cup d_{n,m}$$

где $G_{n,m}$-открытое множество а $d_{n,m}$ конечно. Отсюда легко вытекает, что

$$A(f) \supset \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq 1} G_{n,m},$$

а разность

$$A(f) \setminus \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq 1} G_{n,m}$$

есть не более чем счетное множество. Так как любое счетное или конечное множество имеет тип $G_{\delta\sigma}$, то получим, что $A(f)$ тоже является множеством типа $G_{\delta\sigma}$. То, что оно имеет меру нуль, следует из сходимости почти всюду рядов Фурье-Хаара. □

Достаточность. Предположим, что E есть множество типа $G_{\delta\sigma}$ в $[0,1]$, имеющее меру нуль, и представим его в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где $E_k \subset [0,1]$-множества типа G_δ меры нуль. Очевидно можно предполагать, что $E_k \subset E_{k+1}$. В противном случае могли бы рассматривать множества

$$E'_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$$

которые тоже являются множествами типа G_δ и их объединение равно E. Применив лемму 8, каждому множеству E_k сопоставим функцию $f_k(x)$, такую, что

a*) $|f_k(x)| \leq 2$,

b*) ряд Фурье-Хаара функции f_k сходится в каждой точке $x \in [0,1] \setminus E_k$,

c*) для любой точки $x \in E_k$ имеем $\delta(x, f_k) \geq 1$.

Докажем, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{10^k}$$

является искомой функцией. Ее ограниченность следует из свойства a*). Возьмем любую точку $x \in E$. Для некоторого k имеем

$$x \in E_k \setminus \big(\cup_{i=1}^{k-1} E_i\big).$$

Отсюда вытекает, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(x, \sum_{i=1}^{k-1} 10^{-k} f_k\right),$$

а также

$$\delta(x, f_k) \geq 1,$$
$$\delta(x, f_i) \leq 2\sup_n |S_n(x, f_i)| \leq 2\|f_i\|_\infty \leq 4, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Далее имеем

$$\delta(x, f) \geq \frac{\delta(x, f_k)}{10^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta(x, f_i)}{10^i}$$
$$\geq \frac{1}{2\cdot 10^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{4}{10^i} = \frac{1}{18\cdot 10^k} > 0.$$

Это значит, что ряд Фурье-Хаара расходится в любой точке $x \in E$. Теперь возьмем точку $x \notin E$. При любом фиксированном $i \in \mathbb{N}$ имеем сходимость частичных сумм $S_n(x, f_i)$. Отсюда получим

$$\delta(x, f) = \delta\left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-i} f_i\right)$$
$$\leq 2\sup_n \left|S_n\left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{f_i}{10^i}\right)\right| \leq 4\sum_{i=k+1}^{\infty} 10^{-i} < \frac{1}{2\cdot 10^k}.$$

Так как последнее имеет место при любом k, то получим $\delta(x, f) = 0$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность К. Навасардяну за замечания, сделанные по поводу оформления статьи. □

Список литературы

[1] Бугадзе В. М., О расходимости рядов Фурье-Уолша ограниченных функций на множествах меры нуль, Мат. сборник, 185 (1994), No 7, 119–127.

[2] Бугадзе В. М., О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль, Мат. заметки, 51 (1992), No 5, 20–26.

[3] Буздалин В. В., О неограниченно расходящихся тригонометрических рядах Фурье от непрерывных функций, Мат. заметки, 1970, т. 7, No 1, 7–18.

[4] Буздалин В. В., Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящиеся на заданном множестве, Математический сборник, 1974, т. 95(137), No 1(9), с 84-107.

[5] Goginava U., On devergence of Walsh-Fejer means of bounded functions on sets of measure zero, Acta Math. Hungarica, 2008, vol. 121, No 3, 359-369
[6] Haar A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann., 1910, v. 69, 331-371.
[7] Hahn H., Ueber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge, Arch. d. Math. u. Phys., 1919, 28, 34-45.
[8] Kahane J-P., Katznelson Y., Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques, Studia math., XXVI (1966), 305-306
[9] Karagulyan G. A., Divergence of general localized operators on the sets of measure zero, to appear Colloq. Math., preprint http://arxiv.org/abs/0912.1453v1.
[10] Кашин Б. С., Саакян А. А., Ортогональные ряды, Москва, Наука, 1999.
[11] Kolmogoroff A. N.. Une serie de Fourier-Lebesque divergente presgue partout, Fund. Math., 1923, No 4, 324-328.
[12] Лунина М. А., О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара, Вестн. Моск. ун-та. Серия 1, Мат. мех., 1976, No 4, 13-20.
[13] Прохоренко В. И., О расходящихся рядах по системе Хаара, Изв. вузов. Мат., 1971, No 1, 62-68.
[14] Sierpinski W., Sur Tensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues, Fund. Math., 1921, No 2, 41-49.
[15] Стечкин Б. С., О сходимости и расходимости тригонометрических рядов, Успехи матем. наук, VI, 1951, том. 42, No 2, 148-149.
[16] Тайков Л. В.,О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе, Успехи матем. наук, XVIII, 1963, том 113, No 5, 191-198.
[17] Ульянов П. Л., А. А. Колмогоров и расходящиеся ряды фурье, Успехи мат. наук, 1983, том. 38, No 4, 57-100;
[18] Хеладзе Ш. В., О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленкина, Труды Тбилисского матем. института АН Груз. ССР, 1978, v. 58, 225-242.
[19] Хеладзе Ш. В., О расходимости всюду рядов Фурье-Уолша, Сообщ. АН Груз, ССР, 1975, v.77, No 2, 305-307.
[20] Zeller K., Ueber Konvergenzmengen von Fourierreihen, Arch. Math., 1955, 6, 335-340.

Институт математики, НАН Армении, п-кт Маршала Баграмяна, 24б,, Ереван, 375019, АРМЕНИЯ,
E-mail address: g.karagulyan@yahoo.com