УДК 517.518.362

Г. А. Карагулян

О характеризации множеств точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации

В работе установлены общие теоремы, характеризующие множества точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации. С помощью этих теорем получены полные характеристики множеств точек расходимости рядов Фурье и их средних Чезаро по классическим ортонормированным системам.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: свойство локализации операторов, множества расходимости, множества $G_{\delta\sigma}$

§ 1. Введение

Для функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

множество $E \subset [0,1]$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in [0,1] \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограниченна, то скажем, что E является множеством точек неограниченной расходимости ряда (1.1). Хорошо известна классическая теорема Хана-Серпинского (см. [1], [2]): для того чтобы $E \subset [0,1]$ было множеством точек расходимости (неограниченной расходимости) некоторого ряда (1.1) с непрерывными членами $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$ (G_δ). Характеризации множеств точек расходимости рядов Фурье функций из разных классов посвящено много работ. При этом рассматриваются как ряды Фурье по тригонометрическим так и по другим классическим ортонормированным системам (Уолша, Хаара, Виленкина). Рассматривая случай тригонометрической системы, отметим, что согласно классической теореме А. Н. Колмогорова [3] существует функция из L^1, ряд Фурье которой расходится всюду. В работе Целлера [4] дана полная характеристика множеств точек неограниченной расходимости тригонометрических рядов Фурье, основываясь на методе А. Н. Колмогорова. В нем доказывается, что для любого множества $E \subset [0,2\pi]$ типа G_δ существует ряд Фурье, который неограниченно расходится в каждой точке E и сходится в каждой точке его дополнения. Вопрос о характеризации множеств расходимости рядов Фурье функций из классов L^p при $p>1$ отличается от случая $p=1$ потому, что согласно теореме Карлесона-Ханта ([5], [6]) такие ряды сходятся почти всюду. Поэтому множества расходимости таких рядов имеют нулевые меры. Расходящиеся ряды Фурье имеют долгую историю. Первый пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в данной точке, построил П. Дю Буа-Реймон [7] в 1986 г. С. Б. Стечкин [8] доказал, что для любого множества меры нуль существует функция из $L^2[-\pi,\pi]$, ряд Фурье которой расходится в каждой точке этого множества. Л. В. Тайков [9] установил, что эту функцию можно брать из L^p при любом фиксированном $1 < p < \infty$. Кахан и Кацнельсон [10] доказали существование комплекснозначной непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в точках заданного множества меры нуль. Существенно развивая метод Кахана-Кацнельсона, в [11] В. В. Буздалин доказал, что для любого множества меры нуль существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в каждой точке этого множества. Аналогичные задачи для системы Уолша исследованы в работах [12], [13], [14], [15], [16]. В работе [13] Ш. В. Хеладзе доказывается существование функции $f \in L^p(p < \infty)$, ряд Фурье-Уолша которой расходится в точках заданного множества меры нуль, а В. М. Бугадзе [15] доказал, что в функцию f можно брать из класса L^∞. У. Гогинава в [16] установил, что для любого множества меры нуль существует функция из L^∞, у которой $(C,1)$ средние ряда Фурье-Уолша расходится в точках этого множества. Множества неограниченной расходимости рядов Фурье-Хаара полностью была охарактеризована в работе М. А. Луниной [17]. Ею доказано, что во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа $\tilde{G}_\delta$, и наоборот, любое множество типа $\tilde{G}_\delta$ может стать множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции. При этом эта функция может иметь сколь угодно медленно растущую функцию распределения. Отметим, что более ранней работе В. И. Прохоренко [18] было установлено существование функции $f(x) \in \cap_{1\leqslant p<\infty} L^p$, ряд Фурье-Хаара которой неограниченно расходится на заданном множестве меры нуль, а В. М. Бугадзе [19] доказал, что для любого множества меры нуль существует функция из класса $L^\infty[0,1]$, ряд Фурье-Хаара которой расходится на этом множестве. Недавно в [20] установлено, что для того, чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством точек расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции из L^∞ необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа $G_{\delta\sigma}$. Итак ясно, что вопрос о характеризации множеств расходимости рядов Фурье-Хаара полностью решен.

Оказывается, что явление расходимости на заданном множестве характерно для общих операторов со свойством локализации и это в первые было обнаружено в работе [21]. Там доказывается, что если последовательность операторов (1.2) обладает свойством локализации, то для любого множества $E \subset [0,1]$ нулевой меры, существует функция $f(x)$, являющаяся характеристической функцией некоторого множества $G \subset [0,1]$, такая, что $U_n(x,f)$ расходится в каждой точке $x \in E$. В настоящей работе установлены полные характеристики множеств точек расходимости последовательностей таких операторов. Из них следуют многие результаты для рядов Фурье по классическим ортонормированным системам (тригонометрическая, Уолша, Франклина, Хаара), которые дают ответ на некоторые задачи, рассмотренные в работах [22] [23], [24].

Пусть $L^1[0,1]$ есть пространство интегрируемых по Лебегу функций на $[0,1]$, а $M[0,1]$–пространство ограниченных функций с нормой

$$\|f\|_M = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Рассматриваются последовательности линейных операторов

$$U_n(x,f) : L^1[0,1] \to M[0,1], \tag{1.2}$$

обладающие свойствами

С 1. $\rho_n = \|U_n\|_{L^1\to M} < \infty$, $n = 1,2,\ldots$,

С 2. $\varrho = \sup_n \|U_n\|_{L^\infty\to M} < \infty$,

С 3. если $f \in M[0,1]$ и $f(x) = c$, $x \in (\alpha,\beta)$,то имеем

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x,f) = c, \quad x \in (\alpha,\beta),$$

причем сходимость равномерна в любом замкнутом подмножестве интервала (α,β),

С 4. для любой функции $f \in L^\infty[0,1]$ имеем $U_n(x,f) \to f(x)$ при $n \to \infty$ почти всюду.

Этими свойствами обладают многие операторы в теории рядов Фурье по разным ортогональным системам. Для операторов по системам Хаара и Уолша характерны свойства, в которых некую роль играют множество двоично-рациональных точек

$$Q = \left\{ \frac{i}{2^k},\, i = 0,1,\ldots 2^k,\, k \in \mathbb{N} \right\},$$

а также интервалы вида

$$\left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k} \right),\, i = 0,1,\ldots 2^k - 1,\, k \in \mathbb{N},$$

которые называются двоичными интервалами. Через $\tilde{G}$ обозначим класс множеств, которые можно представить в виде

$$G = \big(\cup_k\, (a_k,b_k) \big) \cup A,$$

где $\{(a_k,b_k)\}$–конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся интервалов, а A составлено из некоторых двоично-рациональных точек, содержащиеся в множестве $\{a_k,b_k\}$. Некоторые из ниже рассматриваемых последовательностей операторов будут обладать также дополнительными свойствами

С 5. для любой функции $f \in L^\infty[0,1]$ множества

$$\{x \in [0,1] : U_n(x,f) > t\}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

являются множествами типа $\tilde{G}$.

С 6. если $f \in M[0,1]$ и $f(x) = c$, на некотором интервале (α, β), то имеем $U_n(x, f \cdot \mathbb{I}_{[x,1]}) \to c/2$ при $x \in [\alpha, \beta)$ и $U_n(x, f \cdot \mathbb{I}_{[0,x]}) \to c/2$ при $x \in (\alpha, \beta]$. При этом сходимости равномерны, соответственно, на отрезках $[\alpha, \beta - \varepsilon)$ и $(\alpha + \varepsilon, \beta]$, если α и β-двоично-рациональные точки.

Отметим, что *C3* и *C6* отражают свойство локализации, характерное в теории рядов Фурье. Причем *C6* является сильным вариантом *C3*. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Если последовательность операторов (1.2) обладает свойствами C1-C4, то для любого множества $E \subset [0,1]$ типа $G_{\delta\sigma}$, с $|E| = 0$, существует функция $f \in L^\infty[0,1]$ для которой*
a) $U_n(x, f)$ расходится при $x \in E$,
b) $U_n(x, f) \to f(x)$ при $x \in [0,1] \setminus E$.

Из этой теоремы легко следует

Теорема 2. *Пусть последовательность операторов (1.2) обладает свойствами C1-C5. Тогда для того, чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством расходимости последовательности $U_n(x, f)$ при некоторой функции $f \in L^\infty[0,1]$, необходимо и достаточно чтобы E было $G_{\delta\sigma}$-множеством меры нуль.*

Хорошо известно, что свойствами *C1-C5* обладают например последовательности операторов частичных сумм рядов Фурье по ортогональным системам Хаара и Франклина, а также последовательности (C, α)-средних рядов Фурье по тригонометрической системе и по системе Уолша при $\alpha > 0$ (см. [25], [26], [27], [28]). Поэтому теорема 2 дает полную характеристику множеств расходимости этих четырех последовательностей операторов в теории рядов Фурье. Чтобы сформулировать эти результаты в одной единой теореме, тригонометрическую систему будем рассматривать в виде $\{e^{2\pi i n x},\ n \in \mathbb{Z}\}$, как систему функций на отрезке $[0,1]$.

Следствие 1. Пусть $U_n(x, f)$ совпадает с одной из вышеупомянутых последовательностей операторов Фурье. Для того чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством расходимости последовательности $U_n(x, f)$ для некоторой функции $f \in L^\infty[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль. Если $U_n(x, f)$ являются (C, α)-средними тригонометрического ряда Фурье ($\alpha > 0$), то от E дополнительно требуется периодичность с периодом 1.

Рассматривается также вопрос о характеризации множеств неограниченной расходимости аналогичных операторов. Мы имеем дело с множествами из метрического пространства $[0,1]$. Открытыми в нем будут множества, которые представимы в виде $G \cap [0,1]$, где G–открытое множество в $\mathbb{R}$. Множества, которые можно представить в виде счетного пересечения открытых множеств отрезка $[0,1]$, называются множествами типа G_δ. Всевозможные счетные объединения множеств G_δ дает класс множеств типа $G_{\delta\sigma}$. В вышеупомянутой теореме Луниной были рассмотрены множества типа $\tilde{G}_\delta$. Этот класс чуть шире класса множеств типа G_δ. Множествами типа $\tilde{G}_\delta$ являются конечные или счетные пересечения множеств типа $\tilde{G}$. В следствии 1 отклонение от обычных $G_{\delta\sigma}$ множеств не было. Причина в том, что счетные объединения множеств

типа $\tilde{G}_\delta$ в точности совпадает с классом множеств типа $G_{\delta\sigma}$, и это мы увидим в низу, при доказательстве теоремы 2.
Если $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ есть некоторая возрастающая функция и

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty, \tag{1.3}$$

то через $\psi(L)$ обозначим класс функций $f(x)$, $x \in [0,1]$, для которых

$$\int_0^1 \psi(|f(t)|)dt < \infty.$$

Теорема 3. *Пусть последовательность операторов (1.2) обладает свойствами C1-C4 и $U_n(x,f) \in C[0,1]$ для любой функции $f \in L^1[0,1]$. Тогда если функция $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию (1.3), то для того, чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством неограниченной расходимости последовательности $U_n(x,f)$ для некоторой функции $f \in \psi(L)$, необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа G_δ меры нуль.*

Среди вышеупомянутых операторов Фурье непрерывными являются частичные суммы ряда Фурье-Франклина и средние Чезаро тригонометрических рядов Фурье, и поэтому из теоремы 3 сразу же получаем

Следствие 2. Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было множеством неограниченной расходимости средних (C,α), $\alpha > 0$, тригонометрического ряда Фурье некоторой функции $f \in \psi(L)$, необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа G_δ меры нуль и имело период 1.

Следствие 3. Для того, чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством неограниченной расходимости ряда Фурье-Франклина некоторой функции $f \in \psi(L)$ необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа G_δ меры нуль.

Теорема 4. *Пусть последовательность операторов (1.2) обладает свойствами C1-C6, а функция $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию (1.3). Тогда для того, чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством неограниченной расходимости последовательности $U_n(x,f)$ для некоторой функции $f \in \psi(L)$, необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа $\tilde{G}_\delta$ меры нуль.*

Так как операторы, соответствующие системам Уолша и Хаара обладают, обладают всеми свойствами *C1-C6*, то из теоремы 4 немедленно следуют

Следствие 4. Для того чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством неограниченной расходимости средних (C,α), $\alpha > 0$, ряда Фурье-Уолша некоторой функции $f \in \psi(L)$ необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа $\tilde{G}_\delta$ меры нуль.

Следствие 5. Для того чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции $f \in \psi(L)$ необходимо и достаточно, чтобы E было множеством типа $\tilde{G}_\delta$ меры нуль.

Как уже отмечалось, следствие 5 было доказано Луниной в [17], а часть следствия 1, касающаяся системе Хаара, установлена автором в работе [20].

Автор выражает глубокую благодарность Г. Г. Геворкяну, М. Г. Григоряну и А. А. Саакяну за обсуждение работы.

§ 2. Доказательства лемм

Через $\mathbb{I}_A(t)$ обозначим характеристическую функцию множества A. Если $I \subset \mathbb{R}$–некоторый интервал и $t > 0$, то через tI обозначим интервал концентрический с I, длина которого равна $t|I|$.

Лемма 2.1. *Если последовательность операторов U_n обладает свойствами C1 и C3, то имеем*

$$\phi(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in[0,1]} \sup_{\|f\|_1\leqslant 1} |U_n(x, f(t)\cdot \mathbb{I}_{\{t:|t-x|>u\}}(t))| < \infty,\ 0 < u < 1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Предположим обратное, что $\phi(u_0) = \infty$ при некотором $0 < u_0 < 1$. Тогда очевидно

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in I} \sup_{\|f\|_1\leqslant 1} |U_n(x, f(t)\cdot \mathbb{I}_{\{t:|t-x|>u_0\}}(t))| = \infty \tag{2.2}$$

для некоторого интервала $I \subset [0,1]$, с $|I| < u_0/2$. Легко усмотреть, что

$$\cup_{x\in I} \{t : |t-x| > u_0\} = (3I)^c. \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (2.3) следует

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in I} \sup_{\|f\|_1\leqslant 1} |U_n(x, f(t)\cdot \mathbb{I}_{(3I)^c}(t))| = \infty. \tag{2.4}$$

Из ограниченности операторов $U_n : L^1 \to M$ следует

$$\gamma(m) = \sup_{1\leqslant n\leqslant m} \sup_{x\in I} \sup_{\|f\|_1\leqslant 1} |U_n(x, f(t)\cdot \mathbb{I}_{(3I)^c}(t))| < \infty, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{2.5}$$

и поэтому, комбинируя (2.4) и (2.5), получаем

$$\gamma(m) \to \infty, \text{ при } m \to \infty. \tag{2.6}$$

Докажем, что по индукции можно выбрать числа $n_k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$ и функции f_k, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что

$$\|f_k\|_1 \leqslant 1, \quad \operatorname{supp} f_k \subset (3I)^c,\ k \geqslant 1, \tag{2.7}$$

$$|U_{n_k}(x_k, f_k)| > k^3 \cdot (1 + \max_{1\leqslant i<k} \|U_{n_i}\|_{L^1\to M}),\ k \geqslant 1 \tag{2.8}$$

$$\sup_{1\leqslant i<k} |U_{n_k}(x, f_i)| < 1, \quad x \in I,\ k > 1. \tag{2.9}$$

Используя (2.5) и (2.6), определим функцию $f_1(x)$, числа $n_1 \in \mathbb{N}$ и $x_1 \in I$ такие, что

$$\|f_1\|_1 \leqslant 1, \quad \operatorname{supp} f_1 \subset (3I)^c,\ k \geqslant 1,$$
$$|U_{n_1}(x_1, f_1)| > 1.$$

Это и станет первым шагом индукции. Далее предположим, что уже определены функции f_k, числа $n_k \in \mathbb{N}$ и $x_k \in I$, удовлетворяющие условиям (2.7) -(2.9), при

$k = 1, 2, \ldots, p$. Опять применив (2.5) и (2.6), найдем функцию $f_{p+1}(x)$ и числа $n_{p+1} \in \mathbb{N}$, $x_{p+1} \in I$, удовлетворяющие условиям (2.7) и (2.8) при $k = p + 1$. Из (2.6) ясно, что при этом n_{p+1} можно брать сколь угодно большим и поэтому, с учетом свойства локализации *C3*, можно обеспечить (2.9) в случае $k = p + 1$. Этим построение будет завершено. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x), \quad \alpha_k = \frac{1}{k^2 \cdot (1 + \max_{1 \leqslant i < k} \|U_{n_i}\|_{L^1 \to M})}. \tag{2.10}$$

Очевидно $f \in L^1$ и $\operatorname{supp} f \subset (3I)^c$. Так как $x_k \in I$, используя (2.7)-(2.10), получим

$$\begin{aligned} &|U_{n_k}(x_k, f)| \geqslant \\ &\qquad \geqslant \alpha_k |U_{n_k}(x_k, f_k)| - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i |U_{n_k}(x_k, f_i)| - \sum_{i=k+1}^{\infty} \alpha_i |U_{n_k}(x_k, f_i)| \\ &\qquad \geqslant k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \geqslant k - 2. \end{aligned}$$

Это дает противоречие, так как $U_n(x, f) \rightrightarrows 0$ равномерно на I согласно *C3*.

Отрезком назовем множества вида (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ и $[a, b]$ и будем использовать обозначение $< a, b >$. Если $I =< a, b >$-некоторый отрезок, то обозначим $\mathring{I} = (a, b)$ и $\bar{I} = [a, b]$. Если G открытое множество в $[0, 1]$, то его можно представить в виде объединения попарно непересекающихся отрезков вида (a, b), $[0, b)$ или $(a, 1]$, где $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ есть некоторые числа. Разбиением открытого множества $G \subset [0, 1]$ назовем семейство отрезков $\Omega = \{\omega_k\}$, каждый из которых имеет один из видов

$$[a, b),\ [a, 1] \text{ или } [0, b), \tag{2.11}$$

и при этом

$$G = \cup_k \omega_k, \quad \operatorname{dist}(\omega_k, G^c) > 0.$$

Очевидно, что каждое открытое множество в $[0, 1]$ обладает некоторым разбиением. Из определения функции $\phi(u)$ (см. (2.1)) следует, что если $f \in L^1[0, 1]$ и $\operatorname{supp} f \subset A$, то

$$|U_n(x, f)| \leqslant \phi(\operatorname{dist}(x, A)) \|f\|_{L^1},\ n = 1, 2, \ldots,\ \operatorname{dist}(x, A) > 0. \tag{2.12}$$

Лемма 2.2. *Если $G \subset [0, 1]$ есть открытое множество, с разбиением $\{\omega_k\}$, а измеримое множество $A \subset G$ удовлетворяет условию*

$$\sum_k \phi(\operatorname{dist}(\omega_k, G^c)) |A \cap \omega_k| < c < \infty, \tag{2.13}$$

то для любой функции $f \in L^\infty[0, 1]$, с $\operatorname{supp} f \subset A$, имеем

$$c\|f\|_\infty > |U_n(x, f)| \to 0, \quad x \in G^c. \tag{2.14}$$

Доказательство. С учетом (2.12), для любой точки $x \in G^c$ имеем

$$|U_n(x,f)| \leqslant \sum_k |U_n(x, f\cdot \mathbb{I}_{\omega_k})| \leqslant \sum_k \phi(\mathrm{dist}\,(x,\omega_k))\|f\cdot \mathbb{I}_{\omega_k}\|_{L^1}$$
$$\leqslant \|f\|_\infty \sum_k \phi(\mathrm{dist}\,(x,\omega_k))|A\cap \omega_k| \leqslant c\|f\|_\infty.$$

Учитывая также соотношение $U_n(x, f\cdot \mathbb{I}_{\omega_k}) \to 0$ при $n\to\infty$, которое следует из свойства *C3*, мы получим

$$\limsup_{n\to\infty} |U_n(x,f)| = \limsup_{n\to\infty} |\sum_{k=1}^\infty U_n(x, f\cdot \mathbb{I}_{\omega_k})|$$
$$= \limsup_{n\to\infty} |\sum_{k=m}^\infty U_n(x, f\cdot \mathbb{I}_{\omega_k})| \leqslant \|f\|_\infty \sum_{k=m}^\infty \phi(\mathrm{dist}\,(x,\omega_k))|A\cap\omega_k|.$$

При достаточно большом m последнюю сумму можно сделать сколь угодно малой в силу (2.13). Отсюда получаем (2.14).

Лемма 2.3. *Если убывающая функция $\phi(t):(0,1]\to[0,\infty)$, такая, что $\phi(t)\to\infty$ при $t\to 0$ и $\varepsilon>0$, то для любого открытого множества $G\subset[0,1]$ существует разбиение Ω, такое, что*

$$\varepsilon > |\omega|\cdot\phi\big(\mathrm{dist}\,(\omega, G^c)\big) \to 0,\ \text{при } |\omega|\to 0, \quad \omega\in\Omega. \tag{2.15}$$

Доказательство. Сначала берем произвольное разбиение Δ, составленное из отрезков длины меньше ε. Каждый из интервалов $\delta\in\Delta$ можно разложить на конечное число более мелких интервалов вида (2.11), таким образом что, если $\omega\subset\delta$ один из таких интервалов, то имеем $|\omega|\cdot\phi(\mathrm{dist}\,(\delta,G^c)) \leqslant |\delta|^2$ и следовательно будем иметь

$$|\omega|\cdot\phi(\mathrm{dist}\,(\omega, G^c)) \leqslant \varepsilon\cdot|\delta|.$$

Так как $|\delta|\to 0$ при $\mathrm{dist}\,(\delta, G^c))\to 0$, то отсюда получаем (2.15).

Обозначим

$$\lambda(A) = A\cup\left\{x\in[0,1] : \limsup_{n\to\infty}|U_n(x,\mathbb{I}_A)|>0\right\}.$$

Из свойства *C4* следует, что

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x,\mathbb{I}_A) = 0,\ \text{п.в. на } [0,1]\setminus A,$$

и получим

$$|\lambda(A)\setminus A| = 0. \tag{2.16}$$

Лемма 2.4. *Если $B\subset[0,1]$ есть открытое, а $A\subset B$ измеримое множества, с $\lambda(A)\subset B$, $0\leqslant|A|<|B|$, то существует другое открытое множество $G\subset B$ такое, что*

$$\lambda(A)\subset G, \quad \lambda(G)\subset B, \tag{2.17}$$

$$|G| = \frac{|A|+|B|}{2}. \tag{2.18}$$

Доказательство. Пусть $\Omega = \{\omega_k\}$ есть произвольное разбиение множества B. Из (2.16) следует существование открытого множества $C \subset [0,1]$ такое, что

$$\lambda(A) \subset C \subset B, \quad |C \cap \omega_k| \leqslant |A \cap \omega_k| + \varepsilon_k |\omega_k|, \quad \omega_k \in \Omega. \tag{2.19}$$

При этом предполагается

$$\varepsilon_k < \min\left\{ \frac{|B \setminus A|}{2}, \frac{1}{k^2 |\omega_k| \phi(\operatorname{dist}(B^c, \omega_k))} \right\}. \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.20) получим

$$|C| = \sum_k |C \cap \omega_k| < |A| + \frac{|B \setminus A|}{2} = \frac{|A| + |B|}{2}. \tag{2.21}$$

Так как B есть открытое множество в $[0,1]$, то его можно представить в виде

$$B = \cup_k \Delta_k,$$

где $\{\Delta_k\}$-конечное или счетное семейство попарно не пересекающихся отрезков вида (a,b), $[0,b)$ или $(a,1]$. Так как $|A| < |B|$, существует число $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{p} |\Delta_k| > \frac{|A| + |B|}{2}. \tag{2.22}$$

Если семейство $\{\Delta_k\}$ конечно, то берем p равным количеству интервалов Δ_k. Обозначим

$$G(t) = C \cup \left(\cup_{k=1}^{p} (t \mathring{\Delta}_k) \right), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.23}$$

и рассмотрим функцию $f(t) = |G(t)|$. С учетом (2.21) и (2.22), имеем

$$f(0) = |C| < \frac{|A| + |B|}{2},$$
$$f(1) > \sum_{k=1}^{p} |\Delta_k| > \frac{|A| + |B|}{2}.$$

Отсюда и из непрерывности $f(t)$ следует, что для некоторого $0 < t_0 < 1$ имеет место равенство

$$|G(t_0)| = \frac{|A| + |B|}{2},$$

т.е. множество $G = G(t_0)$ удовлетворяет условию (2.18). Первое из соотношений (2.17) немедленно следует из (2.19). Остается доказать, что $\lambda(G) \subset B$. Возьмем произвольную точку $x \notin B$. Так как $0 < t_0 < 1$, из (2.23) следует

$$x \notin \overline{\cup_{k=1}^{p} (t_0 \Delta_k)}.$$

Тогда из свойства локализации *C3*, с учетом (2.23) и (2.19), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} |U_n(x, \mathbb{I}_G)| = \limsup_{n\to\infty} |U_n(x, \mathbb{I}_C)| = \limsup_{n\to\infty} |U_n(x, \mathbb{I}_{C \setminus A})|. \tag{2.24}$$

Отсюда и из неравенств (2.21) и (2.20) вытекает

$$\sum_k \phi(\text{dist}\,(B^c,\omega_k))|\omega_k\cap(C\setminus A)|\leqslant\sum_k \phi(\text{dist}\,(B^c,\omega_k))\varepsilon_k|\omega_k|\leqslant\sum_k\frac{1}{k^2}<\infty. \tag{2.25}$$

Далее, применив лемму 2.2, получим равенство

$$\limsup_{n\to\infty} U_n(x,\mathbb{I}_{C\setminus A})=0,$$

которое вместе с (2.24) завершает доказательство леммы.

Рассмотрим семейство открытых множеств $\{G_r : r\in E\}$, где $E\subset\mathbb{R}$-некоторое множество индексов. Скажем, что это семейство является цепью, если $\lambda(G_r)\subset G_{r'}$ при любых $r,r'\in E$, с $r<r'$.

Лемма 2.5. *Если A и B-открытые множества в $[0,1]$, с условиями $\lambda(A)\subset B$ и $\alpha=|A|<|B|=\beta$, то существует цепь открытых множеств*

$$G_r,\quad r\in\mathcal{D}=\left\{\alpha+\frac{i(\beta-\alpha)}{2^k},\,0\leqslant i\leqslant 2^k,\,k=0,1,\dots\right\}$$

такая, что

$$G_\alpha=A,\,G_\beta=B,\quad |G_r|=r,\quad r\in[\alpha,\beta]. \tag{2.26}$$

Доказательство. Определим $G_\alpha=A$, $G_\beta=B$ и применим лемму 2.4 над парой открытых множеств G_α, G_β. Этим определяется открытое множество $G=G_{(\alpha+\beta)/2}$, с условиями (2.17) и (2.18), что означает множества

$$G_\alpha,G_{(\alpha+\beta)/2},G_\beta$$

образуют цепь. Далее, продолжим рассуждения по индукции. Обозначим

$$\mathcal{D}_k[\alpha,\beta]=\{\alpha+\frac{i(\beta-\alpha)}{2^k},\,0\leqslant i\leqslant 2^k\},$$

и предположим, что уже выбраны множества G_r, для всех $r\in\mathcal{D}_k[\alpha,\beta]$, при этом они образуют цепь и $|G_r|=r$. Применив лемму 2.4 над каждой парой множеств $G_{i/2^k}$, $G_{(i+1)/2^k}$, получим множества $G_{(2i+1)/2^{k+1}}$, $0\leqslant i\leqslant 2^k-1$. Ясно, что полученная таким путем семейство $\{G_r,\,r\in\mathcal{D}_{k+1}[\alpha,\beta]\}$ тоже будет цепью. При этом сохраняется свойство $|G_r|=r$ теперь уже при $r\in\mathcal{D}_{k+1}[\alpha,\beta]$. В самом деле, имеем

$$|G_{(2i+1)/2^{k+1}}|=\frac{1}{2}(|G_{i/2^k}|+|G_{(i+1)/2^k}|)=\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2^k}+\frac{i+1}{2^k}\right)=\frac{2i+1}{2^{k+1}}.$$

Продолжив этот процесс, получим семейство множеств G_r, определенные при всех $r\in\mathcal{D}$, которое будет цепью и $|G(r)|=r$. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Если $\varepsilon>0$, $G\subset[0,1]$ есть открытое множество, а $E\subset G$ имеет меру нуль, то существуют открытое множество A, с $E\subset A\subset G$, и функция $h(x)$, $x\in[0,1]$, такие, что*

$$\operatorname{supp} h\subset G,\quad h(x)=1,\,x\in A, \tag{2.27}$$

$$0\leqslant h(x)\leqslant 1,\quad x\in[0,1], \tag{2.28}$$

$$|U_n(x,h)|\leqslant\varepsilon,\quad x\in G^c, \tag{2.29}$$

$$U_n(x,h)\to h(x)\ \textit{в каждой точке}\ x\in[0,1]. \tag{2.30}$$

Доказательство. Пусть $\Omega = \{\omega_k : k \in \mathbb{N}\}$ есть произвольное разбиение множества G. Очевидно можно определить открытое множество B, $E \subset B \subset G$, такое, что

$$|B \cap \omega_k| < \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k \phi(\operatorname{dist}(G^c, \omega_k))}, \quad \omega_k \in \Omega. \tag{2.31}$$

Далее, применив лемму 2.4, получим открытое множество A, с условиями $E \subset A$, $|A| < |B|$ и $\lambda(A) \subset B$. Пусть $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$. Согласно лемме 2.5, существует цепь открытых множеств $\{G(r) : r \in \mathcal{D}\}$, удовлетворяющая условиям

$$G_\alpha = A,\, G_\beta = B, \quad |G_r| = r.$$

Обозначим

$$\tau(x) = \inf\{r : x \in G_r\}, \quad x \in B \setminus A.$$

Отметим, что $\tau(x)$ отображает множество $B \setminus A$ в $[\alpha, \beta]$. Определим непрерывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in [0, \alpha], \\ 0 & \text{при} \quad x \in [\beta, 1], \\ & \text{линейна на} \quad [\alpha, \beta], \end{cases}$$

и функцию

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in A, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus B, \\ f(\tau(x)) & \text{при} \quad x \in B \setminus A. \end{cases} \tag{2.32}$$

Очевидно $h(x)$ удовлетворяет условиям (2.27) и (2.28). Из (2.31) следует

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \phi(\operatorname{dist}(G^c, \omega_k)) |B \cap \omega_k| \leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

и поэтому из леммы 2.2 получаем (2.29). Остается проверить условие (2.30). Рассмотрим функцию

$$p(x) = \mathbb{I}_{G_{r_0}}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(r_k) \mathbb{I}_{G_{r_{k+1}} \setminus G_{r_k}}(x), \tag{2.33}$$

где числа $r_k \in \mathcal{D}$ удовлетворяют неравенству

$$\alpha = r_0 < r_1 < \ldots < r_m = \beta.$$

Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать r_k такими, что

$$|h(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad x \in [0,1]. \tag{2.34}$$

В самом деле, имеем

$$h(x) = p(x) = 1, \quad x \in G_\alpha = A, \tag{2.35}$$

$$h(x) = p(x) = 0, \quad x \in [0,1] \setminus G_\beta = B. \tag{2.36}$$

Если же $x \in G_\beta \setminus G_\alpha$, то имеем $x \in G_{r_{k+1}} \setminus G_{r_k}$ при некотором $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда из определения отображения τ следует, что $r_k \leqslant \tau(x) \leqslant r_{k+1}$. Учитывая (2.32), отсюда получится

$$\inf_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t) \leqslant h(u) \leqslant \sup_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t), \quad u \in G_{r_{i+1}} \setminus G_{r_i}. \tag{2.37}$$

Имеем также

$$\inf_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t) \leqslant f(r_i) \leqslant \sup_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t). \tag{2.38}$$

Из непрерывности $f(t)$ следует, что при достаточно малом

$$\delta = \max_{0 \leqslant i < m} (r_{i+1} - r_i)$$

имеем

$$\sup_{t, t' \in [r_i, r_{i+1}]} |f(t) - f(t')| < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.39}$$

Комбинируя (2.37), (2.38), (2.39), а также (2.35) и (2.36) получаем (2.34). Из (2.34), (2.33) и ограничения $\|U_n\|_{L^\infty \to L^\infty} \leqslant \varrho$ (см. свойство *C2*)) следует

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} |U_n(x, h) - h(x)| &\leqslant \limsup_{n \to \infty} |U_n(x, h - p) - h(x) + p(x)| \\ &+ \limsup_{n \to \infty} |U_n(x, p) - p(x)| \leqslant (\varrho + 1)\varepsilon + \limsup_{n \to \infty} |U_n(x, p) - p(x)|. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Для доказательства (2.30) рассмотрим три случая.
Случай 1: $x \in G_\alpha$. Имеем $h(t) = 1$ при $t \in G_\alpha$. Тогда из свойства локализации *C3* следует

$$\lim_{n \to \infty} U_n(x, h) = 1 = h(x).$$

Случай 2: $x \in B \setminus G_\alpha$. В этом случае имеем

$$x \in G_{r_{k+1}} \setminus G_{r_k} \tag{2.41}$$

при некотором $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда из открытости множеств G_{r_i} следует

$$\lim_{n \to \infty} U_n(x, \mathbb{I}_{G_{r_i}}) = 1, \quad i \geqslant k+1.$$

С другой стороны, учитывая соотношения

$$\lambda(G_{r_i}) \subset G_{r_{i+1}},$$

имеем

$$\lim_{n \to \infty} U_n(x, \mathbb{I}_{G_{r_i}}) = 0, \quad i \leqslant k-1,$$

конечно когда $k > 0$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} U_n(x, \mathbb{I}_{G_{r_{i+1}} \setminus G_{r_i}}) &= \lim_{n \to \infty} U_n(x, \mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}}) \\ &- \lim_{n \to \infty} U_n(x, \mathbb{I}_{G_{r_i}}) = 0,\ i \in \mathbb{N},\ i \neq k, k-1, \end{aligned} \tag{2.42}$$

Из (2.33) и (2.41) вытекает $p(x) = f(r_k)$. Имеем также $U_n(x, \mathbb{I}_B) \to 1$. Отсюда следует

$$\limsup_{n\to\infty} |U_n(x,p) - p(x)| = \limsup_{n\to\infty} |U_n(x,p) - f(r_k)|$$
$$= \limsup_{n\to\infty} |U_n(x,p) - f(r_k)U_n(x,\mathbb{I}_B)| = \limsup_{n\to\infty} |U_n(x, p - f(r_k)\mathbb{I}_B)|. \quad (2.43)$$

Имеем

$$p(x) - f(r_k)\mathbb{I}_B(x) = (1 - f(r_k))\mathbb{I}_{G_{r_0}}(x) + \sum_{i=0}^{m}(f(r_i) - f(r_k))\mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}\setminus G_{r_i}}(x).$$

Далее, имея в виду (2.39) и (2.42), получим

$$\limsup_{n\to\infty} |U_n(x, p - f(r_k)\mathbb{I}_B)|$$
$$= \limsup_{n\to\infty} |\sum_{i\in\mathbb{N}\cap\{k-1,k\}} (f(r_i) - f(r_k))U_n(x, \mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}\setminus G_{r_i}}(x))| \leqslant 2\varrho\varepsilon$$

Комбинируя это с (2.40) и (2.43), получим $U_n(x,h) \to h(x)$.
Случай 3: $x \in [0,1] \setminus B$. Из соотношений $\lambda(G_{r_i}) \subset G_{r_m} = B$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, следует

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x, \mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}\setminus G_{r_i}}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-2,$$

и следовательно, с учетом (2.33), (2.39) и равенства $f(r_m) = 0$, получим

$$\limsup_{n\to\infty} |U_n(x,p)| = \limsup_{n\to\infty} |f(r_{n-1})||U_n(x, \mathbb{I}_{G_{r_m}\setminus G_{r_{m-1}}})| < \varepsilon\varrho.$$

Это завершает доказательство (2.30). Лемма доказана.

В дальнейшем запись

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E,$$

будет означать, что последовательность функций $f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$ на множестве E.
Пусть $\Omega = \{\omega_k\}$ есть разбиение открытого множества G. У каждого $\omega \in \Omega$ существуют два смежных отрезка из Ω (левый и правый), которые обозначим через ω^- и ω^+. Назовем Ω регулярным, если

$$2\omega \subset \omega^* = \omega \cup \omega^- \cup \omega^+. \quad (2.44)$$

Легко усмотреть, что любое открытое множество обладает регулярным разбиением. Если Ω и Ω' являются разбиениями двух открытых множеств G и G', с $G \subset G'$, и при этом любой отрезок $\omega \in \Omega$ содержится в одном из $\omega' \in \Omega'$, то скажем $\Omega < \Omega'$.
Рассмотрим функцию множества $\nu : \Omega \to \mathbb{N}$, которая сопоставляет каждому интервалу $\omega \in \Omega$ некоторое натуральное число. Обозначим

$$U_{(\Omega,\nu)}(x,f) = \sum_{\omega\in\Omega} U_{\nu(\omega)}(x,f) \cdot \mathbb{I}_\omega(x). \quad (2.45)$$

Лемма 2.7. *Пусть последовательность операторов U_n обладает C3-свойством, а функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ принадлежат $L^\infty[0,1]$ и постоянны на некотором открытом множестве $G \subset [0,1]$. Тогда если $\varepsilon > 0$ и $\Omega = \{\omega_k\}$ есть разбиение множества G, то существует функция $\nu : \Omega \to \mathbb{N}$, такая, что*

$$|U_{(\Omega,\nu)}(x, f_i) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad x \in G, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Из свойства *C3* следует, что для любого $\omega \in \Omega$ имеет место $U_n(x, f_i) \rightrightarrows f_i(x)$, $x \in \omega$, $i = 1, 2, \ldots n$. Отсюда для каждого ω можно найти число $\nu(\omega) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|U_{\nu(\omega)}(x, f_i) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad x \in G, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2.8. *Пусть $G \subset [0,1]$ есть открытое множество, а Ω–некоторое его регулярное разбиение, на котором определена функция $\nu : \Omega \to \mathbb{N}$. Тогда, если $C \subset G$-измеримое множество, а функция $f \in L^\infty[0,1]$ удовлетворяет условиям*

$$\|f\|_\infty \leqslant 1, \quad \operatorname{supp} f \subset C, \tag{2.46}$$

то имеет место неравенство

$$|U_{(\Omega,\nu)}(x, f)| \leqslant \sum_{J \in \Omega} c(J)|C \cap J|, \quad x \in [0,1], \tag{2.47}$$

где

$$c(\omega) = \max\{\rho_{\nu(\omega)}, \rho_{\nu(\omega^+)}, \rho_{\nu(\omega^-)}, \phi(|\omega|/2)\}, \tag{2.48}$$

а ρ_n и $\phi(t)$ определены соответственно в C1 и (2.1).

Доказательство. Если $x \notin G$, то имеем $U_{(\Omega,\nu)}(x, f) = 0$ (см. (2.45)). Если же $x \in G$, то имеем

$$x \in \omega, \tag{2.49}$$

при некотором $\omega \in \Omega$. Далее из (2.49) и регулярности разбиения Ω (см. (2.44)) следует, что если $J \in \Omega$, $J \neq \omega, \omega^+, \omega^-$, то $\operatorname{dist}(x, J) > |J|/2$. Используя этот факт, лемму 2.1 и неравенство (2.12) , получим

$$\begin{aligned}
&|U_n(x, f \cdot \mathbb{I}_{(\omega^*)^c})| \\
&\qquad \leqslant \sum_{J \in \Omega : J \neq \omega, \omega^+, \omega^-} |U_n(x, f \cdot \mathbb{I}_J)| \\
&\qquad \leqslant \sum_{J \in \Omega : J \neq \omega, \omega^+, \omega^-} \|f \cdot \mathbb{I}_J\|_{L^1} \phi(\operatorname{dist}(x, J)) \\
&\qquad \leqslant \sum_{J \in \Omega : J \neq \omega, \omega^+, \omega^-} |C \cap J| \phi\left(\frac{|J|}{2}\right) \\
&\qquad \leqslant \sum_{J \in \Omega : J \neq \omega, \omega^+, \omega^-} c(J)|C \cap J|, \; x \in \omega.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

С другой стороны имеем

$$\rho_{\nu(\omega)} \leqslant \min\{c(\omega), c(\omega^+), c(\omega^-)\}$$

и следовательно, с учетом $C1$-свойства, получим

$$\begin{aligned} |U_{\nu(\omega)}(x, f \cdot \mathbb{I}_{\omega^*})| &\leqslant \rho_{\nu(\omega)}|C \cap \omega^*| \\ &= \rho_{\nu(\omega)}(|C \cap \omega| + |C \cap \omega^+| + |C \cap \omega^-|) \\ &\leqslant \sum_{J=\omega,\omega^+,\omega^-} c(J)|C \cap J|, \; x \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Комбинация (2.50) и (2.51) дает неравенство

$$\begin{aligned} |U_{(\Omega,\nu)}(x, f)| = |U_{\nu(\omega)}(x, f)| < |U_{\nu(\omega)}(x, f \cdot \mathbb{I}_{(\omega^*)^c})| \\ + |U_{\nu(\omega)}(x, f \cdot \mathbb{I}_{\omega^*})| < \sum_{J \in \Omega} c(J)|C \cap J|, \end{aligned}$$

что и требовалось доказывать.

Лемма 2.9. *Для любого множества $E \subset [0,1]$ меры нуль, имеющее тип G_δ в $[0,1]$, существует функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям*

a) $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$,

b) $U_n(x, g) \to g(x)$ *в каждой точке* $x \in [0,1] \setminus E$,

c) для любой точки $x \in E$ *имеем*

$$\limsup_{n\to\infty} U_n(x, g) \geqslant 1, \quad \liminf_{n\to\infty} U_n(x, g) \leqslant 0. \tag{2.52}$$

Доказательство. Имеем

$$E = \cap_{k=1}^\infty E_k,$$

где E_k–некоторые открытые множества в $[0,1]$. Построим функции $h_k(x)$, $x \in [0,1]$, и открытые множества A_k, $k = 1, 2, \dots$, которые удовлетворяют ниже изложенным условиям 1)-7). Итак требуется, что

1) $E \subset A_k \subset E_k$, $A_k \subset A_{k-1}$, $k \geqslant 1$ $(A_0 = [0,1])$,

2) $\operatorname{supp} h_k(x) \subset A_{k-1}$, $h_k(x) = 1$, $x \in A_k$, $k \geqslant 1$,

3) $0 \leqslant h_k(x) \leqslant 1$, $x \in [0,1]$, $k \geqslant 1$,

4) $|U_n(x, h_k)| < 2^{-k}$, $x \in A_{k-1}^c$, $k \geqslant 1$,

5)$U_n(x, h_k) \to h_k(x)$ при $n \to \infty$, $x \in [0,1]$.

Дополнительно, каждому множеству A_k сопоставляется некоторое регулярное разбиение Ω_k, с $\Omega_{k+1} < \Omega_k$, и функция $\nu_k : \Omega_k \to \mathbb{N}$ на нем, с условиями

6) $|U_{(\Omega_k,\nu_k)}(x, h_i) - 1| < \frac{1}{k^2}$, $\quad x \in A_k$, $i \leqslant k$,

7) $|U_{(\Omega_i,\nu_i)}(x, h_k)| < \frac{1}{k^2}$, $\quad x \in [0,1]$, $\quad i < k$.

Сделаем эти построения по индукции. Применив лемму 2.6, найдем открытое множество A_1, с $E \subset A_1 \subset E_1$, и функцию $h_1(x)$, $x \in [0,1]$, такие, что

$$\begin{aligned} &h_1(x) = 1, \; x \in A_1, \\ &0 \leqslant h_1(x) \leqslant 1, \quad x \in [0,1], \\ &U_n(x, h_1) \to h_1(x) \text{ в каждой точке } x \in [0,1]. \end{aligned}$$

По лемме 2.7 существует разбиение Ω_1 открытого множества A_1 и функция $\nu_1 : \Omega_1 \to \mathbb{N}$ такие, что

$$|U_{(\Omega_1,\nu_1)}(x, h_1) - h_1(x)| < 1, \quad x \in A_1.$$

Этим завершается первый шаг индукции. Предположим, что уже выбрали множества A_k и функции $h_k(x)$, удовлетворяющие условиям 1)-7) при $k = 1, 2, \dots, p$. Пусть $c_k(J)$ есть постоянные из (2.48), соответствующие разбиению Ω_k множества A_k при $k = 1, 2, \dots, p$. Выберем промежуточное открытое множество C_{p+1}, с $E \subset C_{p+1} \subset E_p \cap A_p$, удовлетворяющее неравенствам

$$|C_{p+1} \cap J| < \frac{|J|}{(p+1)^2 c_l(J)}, \quad J \in \Omega_l,\ l = 1, 2, \dots, p.$$

Тогда при условиях (2.46), из леммы 2.8 следует

$$\begin{aligned} |U_{(\Omega_l,\nu_l)}(x, f)| &\leqslant \sum_{J \in \Omega_l} c_l(J)|C_{p+1} \cap J| \\ &\leqslant \frac{1}{(p+1)^2} \sum_{J \in \Omega_l} |J| \leqslant \frac{1}{(p+1)^2},\ x \in [0,1],\ l \leqslant p. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Если $\|f\| \leqslant 1$ и $\operatorname{supp} f \subset C_{p+1}$ Применив лемму 2.6, можно найти открытое множество A_{p+1} и функцию $h_{p+1}(x)$, $x \in [0, 1]$, такие, что

$$\begin{aligned} &E \subset A_{p+1} \subset C_{p+1} \subset E_p \cap A_p, \\ &\operatorname{supp} h_{p+1} \subset C_{p+1}, \quad h_{p+1}(x) = 1,\ x \in A_{p+1}, \\ &0 \leqslant h_{p+1}(x) \leqslant 1, \quad x \in [0, 1], \\ &|U_n(x, h_{p+1})| \leqslant 2^{-p-1}, \quad x \in (A_p)^c, \\ &U_n(x, h_{p+1}) \to h_{p+1}(x) \text{ в каждой точке } x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Отсюда следуют условия 1)-5) при $k = p + 1$. Из (2.53) следует неравенство

$$|U_{(\Omega_l,\nu_l)}(x, h_{p+1})| \leqslant \frac{1}{(p+1)^2},\ x \in [0, 1],\ l \leqslant p,$$

которое дает 7) в случае $k = p+1$. Далее, применив лемму 2.7 найдем разбиение Ω_{p+1} множества A_{p+1} и функция $\nu_{p+1} : \Omega_{p+1} \to \mathbb{N}$ такие, что выполняется 6) при $k = p + 1$. Этим завершается процесс индукции. Из 1) следует

$$E = \cap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Определим

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} h_i(x) \tag{2.54}$$

в точках

$$x \in [0, 1] \setminus E, \tag{2.55}$$

а при $x \in E$ полагаем $g(x) = 0$. Отметим, что ряд (2.54) сходится в случае (2.55). Более того, при $x \notin E$ имеем

$$x \in A_{k-1} \setminus A_k, \tag{2.56}$$

для некоторого $k = 1, 2, \ldots$, а это значит, что

$$h_i(x) = 0, \quad i > k, \tag{2.57}$$

$$h_i(x) = 1, \quad i < k. \tag{2.58}$$

Отсюда следует

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} h_i(x) = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} + (-1)^{k+1} h_k(x). \tag{2.59}$$

Если k четно, то получим $g(x) = 1 - h_k(x)$, а при нечетном k получится $g(x) = h_k(x)$. Из этого, в виду свойства 3) функций $h_k(x)$, получим условие a) леммы. Заметим, что ряд (2.54) сходится в L^1. Тогда, в силу ограниченности операторов $U_n : L^1 \to M$, заключаем, что

$$U_n(x, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} U_n(x, h_i), \tag{2.60}$$

причем ряд сходится равномерно. Теперь вновь предположим, что имеет место (2.55) и следовательно (2.56). Тогда из свойства 4) вытекает

$$|U_n(x, h_i)| \leqslant \frac{1}{2^i}, \quad i > k.$$

Отсюда, учитывая (2.59) и (2.60) а также свойство 5), при $m > k$ получим

$$\limsup_{n\to\infty} |U_n(x, g) - g(x)| = \limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{i=m}^{\infty} (-1)^{i+1} U_n(x, h_i)\Big|$$
$$\leqslant \sum_{i=m}^{\infty} |U_n(x, h_i)| \leqslant \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Так как m–произвольное число, то получим

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x, g) = g(x), \quad x \in [0, 1] \setminus E.$$

Чтобы доказывать условие c) леммы, предположим $x \in E$. Тогда имеем $x \in A_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что можно единственным образом фиксировать последовательность $\omega_k \in \Omega_k$, $\omega_{k+1} \subset \omega_k$, с $x \in \omega_k$. По свойству 7) имеем

$$|U_{\nu(\omega_k)}(x, h_i)| \leqslant \frac{1}{i^2}, \quad i > k,$$

а из 6) следует

$$|U_{\nu(\omega_k)}(x, h_i) - 1| \leqslant \frac{1}{k^2}, \quad i \leqslant k.$$

Отсюда получим

$$
\begin{aligned}
&|U_{\nu(\omega_k)}(x,g)-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}|\\
&\qquad\qquad\leqslant \sum_{i=1}^{k}|U_{\nu(\omega_k)}(x,h_i)-1|+\sum_{i=k+1}^{\infty}|U_{\nu(\omega_k)}(x,h_i)|\\
&\qquad\qquad\leqslant k\cdot\frac{1}{k^2}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<\frac{2}{k}
\end{aligned}
$$

Так как сумма $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1}$ принимает значения 0 и 1 по очереди, то имеем (2.52) для любой точки $x\in E$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Предположим, что E есть множество типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль и представим его в виде

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k,$$

где E_k-множества типа G_δ меры нуль. Очевидно можно предполагать, что $E_k\subset E_{k+1}$. В противном случае могли бы рассматривать множества

$$E'_k=\bigcup_{j=1}^{k}E_j$$

которые тоже являются множествами типа $G_{\delta\sigma}$ и их объединение равно E. Применив лемму 2.9, каждому множеству E_k сопоставим функцию $g_k(x)$, такую, что

a) $0\leqslant g_k(x)\leqslant 1$,

b) $U_n(x,g_k)\to g_k(x)$ в каждой точке $x\notin E_k$,

c) для любой точки $x\in E_k$ имеем

$$\delta(x,g_k)=\limsup_{n\to\infty}U_n(x,g_k)-\liminf_{n\to\infty}U_n(x,g_k)\geqslant 1.$$

Докажем, что

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k(x)}{(4\varrho+2)^k}$$

является искомой функцией, где ϱ постоянная из $C2$). Ее ограниченность следует из свойства a). Возьмем любую точку $x\in E$. Для некоторого k имеем

$$x\in E_k\setminus\big(\cup_{i=1}^{k-1}E_i\big).$$

Отсюда вытекает, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}U_n\left(x,\sum_{i=1}^{k-1}(4\varrho+2)^{-i}g_i\right),\tag{3.1}$$

а также

$$\delta(x, g_k) \geqslant 1, \tag{3.2}$$
$$\delta(x, g_i) \leqslant 2\sup_n |U_n(x, g_i)| \leqslant 2\varrho\|g_i\|_\infty \leqslant 2\varrho, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

Далее из (3.1)-(3.3) следует

$$\delta(x, f) \geqslant \frac{\delta(x, g_k)}{(4\varrho+2)^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta(x, g_i)}{(4\varrho+2)^i}$$
$$\geqslant \frac{1}{(4\varrho+2)^k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2\varrho}{(4\varrho+2)^i} = \frac{1}{2\cdot(4\varrho+2)^k} > 0.$$

Это значит, что последовательность $U_n(x, f)$ расходится в любой точке $x \in E$. Теперь возьмем точку $x \notin E$. Тогда имеем $x \notin E_i$, $i = 1, 2, \ldots$, и при любом фиксированном $i \in \mathbb{N}$ получаем сходимость последовательности $U_n(x, g_i)$. Отсюда следует

$$\delta(x, f) = \delta\left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} (4\varrho+2)^{-i} g_i\right)$$
$$\leqslant 2\sup_n \left|U_n\left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{g_i}{(4\varrho+2)^i}\right)\right| \leqslant 2\varrho \sum_{i=k+1}^{\infty} (4\varrho+2)^{-i} < \frac{1}{2\cdot(4\varrho+2)^k}.$$

Так как последнее имеет место при любом k, то получим $\delta(x, f) = 0$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Достаточность следует из теоремы 1. Докажем необходимость. Для данной функции $f \in L^1[0,1]$ рассмотрим множества

$$A_{n,m}(f) = \bigcup_{i,j>n} \left\{x \in [0,1] : |U_i(x, f) - U_j(x, f)| > \frac{1}{m}\right\}. \tag{3.4}$$

Докажем, что множество

$$A(f) = \cup_{m\geqslant 1} \cap_{n\geqslant 1} A_{n,m}(f)$$

в точности состоит из точек расходимости последовательности $U_n(x, f)$. Для этого проверим эквивалентность следующих соотношений:

$$x \in A(f), \Leftrightarrow \exists m_0, \text{ так что } x \in A_{n,m_0}(f), \text{ при любом } n = 1, 2, \ldots$$
$$\Leftrightarrow \exists p_k,\, q_k \to \infty,\ |U_{p_k}(x, f) - U_{q_k}(x, f)| > \frac{1}{m_0},$$
$$\Leftrightarrow U_n(x, f) \text{ расходится }.$$

Отметим, что согласно свойству *C6*, множества

$$\left\{x \in [0,1] : |U_i(x, f) - U_j(x, f)| > \frac{1}{m}\right\}$$

являются множествами типа $\tilde{G}$. Отсюда ясно, что

$$A_{n,m}(f) = G_{n,m} \cup d_{n,m}$$

где $G_{n,m}$–открытое множество а $d_{n,m}$ конечно. Отсюда легко вытекает, что

$$A(f) \supset \bigcup_{m\geqslant 1} \bigcap_{n\geqslant 1} G_{n,m},$$

а разность

$$A(f) \setminus \bigcup_{m\geqslant 1} \bigcap_{n\geqslant 1} G_{n,m}$$

есть не более чем счетное множество. Так как любое счетное или конечное множество имеет тип $G_{\delta\sigma}$, то получим, что $A(f)$ тоже является множеством типа $G_{\delta\sigma}$. То, что оно имеет меру нуль, следует из $C4$-свойства последовательности U_n. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Будем пользоваться функциями h_k, построенными в доказательстве леммы 2.9. Совершенно ясно, что в свойствах функций h_k от множеств A_k можно требовать

$$|A_k| < \frac{1}{\psi(3^{k+2})}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.5}$$

а оценки в условиях 4), 6) и 7) можно заменить на $< 4^{-k}$. Определим

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (-3)^{i+1} h_i(x), & x \in [0,1] \setminus E, \\ 0, & x \in E. \end{cases} \tag{3.6}$$

Если $x \in E$, то имеем

$$x \in A_{k-1} \setminus A_k, \tag{3.7}$$

для некоторого $k = 1, 2, \dots$ и

$$|g(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{k} 3^{i+1} < 3^{k+2}.$$

Отсюда, в силу (3.5), получим

$$\int_0^1 \psi(|g(x)|)dx \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \psi(3^{i+2})|A_{i-1} \setminus A_i| < \infty$$

и следовательно $g \in \psi(L)$. Из (3.7), (2.57) и (2.58) следует

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} (-3)^{i+1} h_i(x) = \sum_{i=1}^{k-1} (-3)^{i+1} + (-3)^{k+1} h_k(x), \tag{3.8}$$

а из сходимости ряда (3.6) в L^1 следует

$$U_n(x, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} U_n(x, h_i), \tag{3.9}$$

причем ряд сходится равномерно. При условии (3.7) из свойства 4) вытекает

$$|U_n(x,h_i)| \leqslant \frac{1}{4^i}, \quad i>k.$$

Отсюда, учитывая (3.8) и (3.9) а также свойство 5), при $m>k$ получим

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}|U_n(x,g)-g(x)| &= \limsup_{n\to\infty}|\sum_{i=m}^{\infty}(-3)^{i+1}U_n(x,h_i)| \\ &\leqslant \sum_{i=m}^{\infty}3^{i+1}|U_n(x,h_i)| \leqslant \sum_{i=m}^{\infty}\frac{3^{i+1}}{4^i} = \frac{12\cdot 3^m}{4^m}.\end{aligned}$$

Так как m–произвольное число, то получим

$$\lim_{n\to\infty}U_n(x,g)=g(x), \quad x\in[0,1]\setminus E.$$

Если же $x\in E$, то имеем $x\in A_k$, $k=1,2,\ldots$. Отсюда следует существование последовательности $\omega_k\in\Omega_k$, $\omega_{k+1}\subset\omega_k$, с $x\in\omega_k$. Применив 6) и 7), получим

$$|U_{\nu(\omega_k)}(x,h_i)| \leqslant \frac{1}{4^i}, \quad i>k,$$
$$|U_{\nu(\omega_k)}(x,h_i)-1| \leqslant \frac{1}{4^k}, \quad i\leqslant k,$$

и следовательно имеем

$$\begin{aligned}&|U_{\nu(\omega_k)}(x,g)-\sum_{i=1}^{k}(-3)^{i+1}| \\ &\qquad\leqslant \sum_{i=1}^{k}3^{i+1}|U_{\nu(\omega_k)}(x,h_i)-1| + \sum_{i=k+1}^{\infty}3^{i+1}|U_{\nu(\omega_k)}(x,h_i)| \\ &\qquad\leqslant \frac{18\cdot 3^k}{4^k} + \sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{3^{i+1}}{4^i} \to 0.\end{aligned}$$

Из этого получаем расходимость $U_n(x,g)$ в произвольной точке $x\in E$. Теорема доказана.

Пусть A^+ и A^- две непересекающиеся подмножества множества двоично-рациональных чисел $Q\subset(0,1)$. Рассмотрим функцию

$$\gamma(t)=t+\sum_{r_k\in A^-:\, r_k<t}2^{-k}+\sum_{r_k\in A^+:\, r_k\leqslant t}2^{-k}. \tag{3.10}$$

Очевидно γ представляет собою возрастающую функцию из $[0,1]$ в $[0,2]$, причем имеем

$$\gamma(x)=\gamma(x+),\, x\in A^+, \quad \gamma(x)=\gamma(x-),\, x\in A^-, \tag{3.11}$$

а в точках $x\notin A^+\cup A^-$ функция $\gamma(x)$ непрерывна. Более того, γ является мера-сохраняющим взаимно-однозначным отображением из $[0,1]$ на $\gamma([0,1])$.

Лемма 3.1. *Для любого интервала $I \subset [0,2]$ множество $\gamma^{-1}(I) =< \alpha, \beta >$ является отрезком. При этом*

$$\alpha \in< \alpha,\beta > \quad \Rightarrow \quad \alpha \in A^+, \tag{3.12}$$

$$\beta \in< \alpha,\beta > \quad \Rightarrow \quad \beta \in A^-. \tag{3.13}$$

Доказательство. То, что $\gamma^{-1}(I)$ является отрезком сразу следует из монотонности функции γ. Если $\alpha \in< \alpha, \beta >$, то легко проверить, что в точке α функция γ не может быть непрерывной или непрерывной слева. Поэтому и получим $\alpha \in A^+$, что доказывает (3.12). Аналогично доказывается (3.13).

Пусть $E \subset [0,1]$ есть некоторое множество типа G_δ. Тогда имеем

$$E = \cap_n E_n \tag{3.14}$$

где $E_n \subset \tilde{G}$ и можно предполагать $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$. Обозначим

$$B = \cap_k \mathring{E}_k, \quad A = E \setminus B. \tag{3.15}$$

Очевидно, что множество $A \subset Q$ составлено из некоторых концов составляющих интервалов множеств E_k. Отсюда ясно, что если $t \in A$, то

$$t \in< a_k, b_k >, \; k = 1,2,\ldots, \tag{3.16}$$

где $< a_k, b_k >$ есть составляющий отрезок множества E_k. Так как сама точка t является концом по крайней мере одного из составляющих отрезков множеств E_k, то легко проверить, что справедливо одно из соотношений

$$t = a_k, \; k > k(t), \text{ или} \tag{3.17}$$

$$t = b_k, \; k > k(t). \tag{3.18}$$

Множество точек, удовлетворяющие первому условию обозначим через A^+, а множество точек с (3.18)–через A^-. Таким образом получим представление

$$E = B \cup A^+ \cup A^- \tag{3.19}$$

для произвольного множества типа $\tilde{G}_\delta$. Функцию $\gamma(t)$, определенную в (3.10), назовем преобразующей множества E.

Лемма 3.2. *Если функция $\gamma(t)$ является преобразующей множества $E \subset [0,1]$ типа $\tilde{G}_\delta$, то $\gamma(E) \subset [0,2]$ является множеством типа G_δ.*

Доказательство. Пусть E имеет представление (3.14). Тогда имеем

$$\gamma(E) = \bigcap_n \gamma(E_n),$$

и поэтому достаточно установить, что каждое $\gamma(E_n)$ является множеством типа G_δ. Обозначим

$$G_k = \gamma(E_n) \bigcup \left(\bigcup_{t \in A^+} (\gamma(t), \gamma(t) - 1/k) \right) \bigcup \left(\bigcup_{t \in A^-} (\gamma(t) + 1/k, \gamma(t)) \right). \tag{3.20}$$

Очевидно
$$\bigcap_k G_k = \gamma(E_n).$$
С другой стороны заметим, что G_k–открытые множества. В самом деле, если $x \in G_k$, то либо x принадлежит одному из интервалов в объединении (3.20) либо $x \in \gamma(E_n)$. В первом случае сразу же получится, что x является внутренней точкой для G_k. Предположим, что $x \in \gamma(E_n)$. Тогда имеем $x \in \gamma(E_n \setminus (A^+ \cup A^-)$ или $x \in \gamma(A^+ \cup A^-)$. Так как γ монотонна, и непрерывна в точках $t \in E_n \setminus (A^+ \cup A^-)$ то $\gamma(E_n \setminus (A^+ \cup A^-))$–открытое множество и любая его точка будет внутренней для G_k. Рассмотрим случай $x \in \gamma(A^+ \cup A^-)$. Если $x \in \gamma(A^-)$, то $x = \gamma(t)$, $t \in A^-$. Тогда в силу (3.16) и (3.17), получаем $(a_n, t] \subset E_n$ и следовательно
$$\gamma((a_n, t]) \subset \gamma(E_n).$$
По определению функция γ непрерывна слева в точке $t \in A^-$ (см. (3.10), (3.11)). Отсюда, так как $x = \gamma(t)$ получаем
$$(\gamma(t) - \delta, \gamma(t)] \subset \gamma(E_n) \subset G_k, \tag{3.21}$$
для некоторого $\delta > 0$. С другой стороны из (3.18) имеем $(\gamma(t), \gamma(t) + 1/k) \subset G_k$. Отсюда и из (3.21) следует, что $x = \gamma(t)$ является внутренней точкой множества G_k. Аналогично устанавливается, что любая точка $x \in \gamma(A^+)$ является внутренней точкой для G_k и лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим последовательность операторов
$$\xi_n(x, f) = 2n \int_{x-1/n}^{x+1/n} f(t)dt, \quad x \in [0, 2]. \tag{3.22}$$
Очевидно она обладает свойствами *C1*-*C4*. Возьмем произвольную функцию $f \in L^\infty[0, 2]$. Обозначим
$$g(t) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0, 1], \tag{3.23}$$
и определим оператор
$$\tilde{U}_n(x, f) = \begin{cases} U_n(t, g), & t \in [0, 1] \setminus (A^+ \cup A^-), \\ 2U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[t,1]}), & t \in A^+, \\ 2U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[0,t]}), & t \in A^-, \\ \xi_n(x, f), & x \in \Delta = [0, 2] \setminus \gamma([0, 1]). \end{cases} \tag{3.24}$$
Очевидно, что из свойств *C1*,*C2* и *C4* последовательностей U_n и ξ_n следует, что $\tilde{U}_n$ также обладает этими свойствами. Докажем что $\tilde{U}_n$ обладает свойством локализации *C3*). Пусть $f(x) = c$ на некотором интервале $J \subset [0, 2]$, а для интервала I имеем $\bar{I} \subset J$. В силу *C3*) свойства ξ_n имеем
$$\tilde{U}_n(x, f) = \xi_n(x, f) \rightrightarrows f(x), \quad x \in I \cap \Delta = I \setminus \gamma([0, 1]). \tag{3.25}$$
Остается доказать равномерную сходимость $\tilde{U}_n$ на множестве $I \cap \gamma([0, 1])$. Из леммы 3.1 вытекает, что $\gamma^{-1}(J) =< a, b >$ и $\gamma^{-1}(I) =< \alpha, \beta >$. Причем ясно, что
$$a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b, \quad g(t) = 1, \quad t \in < a, b > . \tag{3.26}$$

Докажем , что

$$U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[t,1]}) \rightrightarrows \frac{c}{2}, \quad U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[0,t]}) \rightrightarrows \frac{c}{2}, \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{3.27}$$

Возьмем любую точку $\nu \in (\alpha, \beta)$ и покажем равномерную сходимость последовательностей (3.27) на множестве $(\alpha, \nu]$. Если $a < \alpha$, то это очевидно следует из свойства *C6*. Если же $a = \alpha$, то легко усмотреть, что $a, \alpha \in A^+ \cup A^-$. Тогда опять из *C6* следует равномерная сходимость этих последовательностей на $(\alpha, \nu]$. Аналогично можно доказать равномерную сходимость на $[\nu, \beta)$ и таким образом (3.27) будет установлено. Имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_n(x, f) &= U_n(t, g) \\
&= U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[0,t]}) + U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[t,1]}),\, t \in (\alpha, \beta) \setminus (A^+ \cup A^-), \\
\tilde{U}_n(x, f) &= 2U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[0,t]}),\, t \in (\alpha, \beta) \cap A^+, \\
\tilde{U}_n(x, f) &= 2U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[t,1]}),\, t \in (\alpha, \beta) \cap A^-.
\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (3.27) и свойства *C3*) последовательности ξ_n, следует

$$\tilde{U}_n(x, f) \rightrightarrows c, \quad x \in \gamma((\alpha, \beta)). \tag{3.28}$$

Если окажется, что $\alpha, \beta \notin < \alpha, \beta >$, то будем иметь $I = \gamma((\alpha, \beta))$. Далее из (3.25) и (3.28) получаем равномерную сходимость последовательности $\tilde{U}_n(x, f)$ на интервале I. Возможны также соотношения $\alpha \in < \alpha, \beta >$ и $\beta \in < \alpha, \beta >$. При выполнении первого из них, в силу леммы 3.1 имеем $\alpha \in A^+$, откуда, с учетом (3.24) и свойства *C6* последовательности U_n, получаем

$$\tilde{U}_n(x, f) = 2U_n(\alpha, g \cdot \mathbb{I}_{[\alpha,1]}) \to c, \quad x = \gamma(\alpha).$$

Аналогично доказывается $\tilde{U}_n(x, f) \to c$, если $\beta \in < \alpha, \beta >$ и $x = \gamma(\beta)$. Этим будет установлено, что $\tilde{U}_n(x, f) \rightrightarrows c$, $x \in I$, и следовательно последовательность операторов $\tilde{U}_n$ удовлетворяет также условию *C3*).

Пусть теперь $E \subset [0, 1]$ есть произвольное множество типа $\tilde{G}_\delta$, имеющее представление (3.19). Рассмотрим функцию (3.10) соответствующую множествам A^+ и A^-. Из леммы 10 вытекает, что $F = \gamma(E)$ является множеством типа G_δ. Тогда применив теорему 3, найдем функцию $f \in L^\infty[0, 2]$, для которой F является множеством неограниченной расходимости для последовательности $\tilde{U}_n(x, f)$, определенной в (3.18). Рассмотрим функцию $g(t)$ из (3.23). Возьмем любую точку $t \in E$. Имеем, что последовательность $\tilde{U}_n(x, f)$ расходится в точке $x = \gamma(t) \in F$. Рассмотрим случай $t \in B$ (см. (3.19)). Тогда имеем $t \in [0, 1] \setminus (A^+ \cup A^-)$ и следовательно $U_n(t, g) = \tilde{U}_n(x, f)$ (см. (3.24)). Отсюда следует расходимость последовательности $U_n(t, g)$. Если же $t \in A^+$, то имеем

$$\tilde{U}_n(x, f) = 2U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[t,1]}),$$

и последовательность $U_n(t, g \cdot \mathbb{I}_{[t,1]})$ будет расходится. Так как $t \in A^+ \subset Q$, в силу свойства *C6* последовательности U_n получаем расходимость $U_n(t, g)$. Аналогичное можно доказать также для точек $t \in A^-$. Отсюда выводим расходимость последовательности $U_n(t, g)$ на множестве E. Если же $t \in [0, 1] \setminus E$, то имеем, что в точке $x = \gamma(t)$ сходится последовательность $\tilde{U}_n(x, f)$. С другой стороны для такого же t имеем $U_n(t, g) = \tilde{U}_n(x, f)$ и следовательно $U_n(t, g)$ тоже сходится. Теорема 4 доказана.

Список литературы

[1] W. Sierpinski, "Sur Tensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues", *Fund. Math.*, 1921, № 2, 41–49.

[2] H. Hahn, "Ueber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge", *Arch. d. Math. u. Phys.*, **28** (1919), 34–45.

[3] A. N. Kolmogoroff, "Une serie de Fourier-Lebesque divergente presgue partout,", *Fund. Math.*, 1923, № 4, 324–328.

[4] K. Zeller, "Ueber Konvergenzmengen von Fourierreihen", *Arch. Math.*, 1955, № 6, 335–340.

[5] L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series", *Acta Math.*, **116** (1966), 135–157.

[6] R. A. Hunt, "On the convergence of Fourier series in orthogonal expansions and their continuous analogues", Southern Illinois University Press, 1968, 235–256.

[7] T. Du Bois-Reymond, "Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformen", *Abh. Akad. Wiss. München*, **X** (1876), 1–103.

[8] Б. С. Стечкин, "О сходимости и расходимости тригонометрических рядов", *Успехи матем. наук*, **42**:2 (1951), 148–149.

[9] Л. В. Тайков, "О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе", *Успехи матем. наук*, **113**:5 (1963), 191–198.

[10] J-P. Kahane , Y. Katznelson, "Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques", *Studia math.*, **XXVI** (1966), 305–306.

[11] В. В. Буздалин, "О неограниченно расходящихся тригонометрических рядах Фурье от непрерывных функций", *Мат. заметки*, **7**:1 (1970), 7–18.

[12] С. Ю. Лукашенко, "О структуре множеств расходимости тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша", *Докл. АН СССР*, **253**:3 (1980), 528–529.

[13] Ш. В. Хеладзе, "О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленкина", *Труды Тбилисского матем. института АН Груз. ССР*, **58** (1978), 225–242.

[14] Ш. В. Хеладзе, "О расходимости всюду рядов Фурье-Уолша", *Сообщ. АН Груз. ССР*, **77**:2 (1975), 305–307.

[15] В. М. Бугадзе, "О расходимости рядов Фурье-Уолша ограниченных функций на множествах меры нуль", *Мат. сборник*, **185**:7 (1994), 119–127.

[16] U. Goginava, "On devergence of Walsh-Fejer means of bounded functions on sets of measure zero", *Acta Math. Hungarica*, **121**:3 (2008), 359-369.

[17] М. А. Лунина, "О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара", *Вестн. Моск. ун-та, Серия 1, Мат. мех.*, 1976, № 4, 13–20.

[18] В. И. Прохоренко, "О расходящихся рядах по системе Хаара", *Изв. вузов. Мат.*, 1971, № 1, 62–68.

[19] В. М. Бугадзе, "О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль", *Мат. заметки*, **51**:5 (1992), 20–26.

[20] Г. А. Карагулян, "Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара", *Известия НАН Армении (в печати)*.

[21] G. A. Karagulyan, "Divergence of general localized operators on the sets of measure zero", *Colloq. Math.,*; http://arxiv.org/abs/0912.1453v1 , (в печати)

[22] П. Л. Ульянов, "О расходимости рядов Фурье", *Успехи Мат. Наук*, **12**:3 (1957), 75–132.

[23] П. Л. Ульянов, "А. А. Колмогоров и расходящиеся ряды Фурье", *Успехи Мат. Наук*, **38**:4 (1983), 57–100.

[24] W. R. Wade, "Recent developments in the theory of Walsh series", *Internat. Journ. of Math. and Math, Sci.*, **5**:4 (1982), 625-673.

[25] Б. С. Кашин , А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, Москва, 1984.

[26] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды, т. 1*, Мир, Москва, 1965.

[27] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, Москва, 1961.

[28] Б. И. Голубов , А. В. Ефимов , В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша, Теория и применения*, Наука, Москва, 1987.

Г. А. Карагулян (G. A. Karagulyan)
Институт математики НАН Армении п-кт Маршала
Баграмяна, 24б, Ереван, 0019, АРМЕНИЯ
E-mail: g.karagulyan@yahoo.com

Поступила в редакцию
16.03.2010