

УДК 517.53

А. И. ПЕТРОСЯН

ОЦЕНКА В C^m -НОРМЕ МИНИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
 $\bar{\partial}$ -УРАВНЕНИЯ В ПОЛИДИСКЕ

В работе Шарпантье [1] получено интегральное представление функций $u(z)$, гладких на замыкании полидиска, где для упрощения записи рассматривается случай бидиска $\mathbb{U}^2 = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Это представление имеет вид

$$u(z) = P_\alpha[u](z) + T_\alpha[\bar{\partial}u](z), \quad (1)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 > -1$, $\alpha_2 > -1$,

$$P_\alpha[u](z) = \frac{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)}{(2\pi i)^2} \int_{\mathbb{U}^2} u(\zeta_1, \zeta_2) \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^{\alpha_1}}{(1 - \bar{\zeta}_1 z_1)^{\alpha_1 + 2}} \frac{(1 - |\zeta_2|^2)^{\alpha_2}}{(1 - \bar{\zeta}_2 z_2)^{\alpha_2 + 2}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta;$$

$$\begin{aligned} T_\alpha[\bar{\partial}u](z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1| < 1} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1}(\zeta_1, z_2) \left(\frac{1 - |\zeta_1|^2}{1 - \bar{\zeta}_1 z_1} \right)^{\alpha_1 + 1} \frac{d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1}{z_1 - \zeta_1} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2| < 1} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(z_1, \zeta_2) \left(\frac{1 - |\zeta_2|^2}{1 - \bar{\zeta}_2 z_2} \right)^{\alpha_2 + 1} \frac{d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2}{z_2 - \zeta_2} + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{U}^2} \bar{\partial}u \wedge \left(\frac{1 - |\zeta_1|^2}{1 - \bar{\zeta}_1 z_1} \right)^{\alpha_1 + 1} \left(\frac{1 - |\zeta_2|^2}{1 - \bar{\zeta}_2 z_2} \right)^{\alpha_2 + 1} \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1)d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge \\ & \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \\ & + \frac{\alpha_2 + 1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{U}^2} \bar{\partial}u \wedge \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^{\alpha_1 + 1}}{(1 - \bar{\zeta}_1 z_1)^{\alpha_1 + 1}(z_1 - \zeta_1)} \frac{(1 - |\zeta_2|^2)^{\alpha_2}}{(1 - \bar{\zeta}_2 z_2)^{\alpha_2 + 2}|\zeta - z|^2} d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 - \\ & - \frac{\alpha_1 + 1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{U}^2} \bar{\partial}u \wedge \frac{(1 - |\zeta_2|^2)^{\alpha_2 + 1}}{(1 - \bar{\zeta}_2 z_2)^{\alpha_2 + 1}(z_2 - \zeta_2)} \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^{\alpha_1}}{(1 - \bar{\zeta}_1 z_1)^{\alpha_1 + 2}|\zeta - z|^2} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2. \end{aligned}$$

Оператор P_α является ортогональным проектором в гильбертовом пространстве $L^2(d\sigma_\alpha)$ на подпространство функций, голоморфных в бидиске. Здесь $d\sigma_\alpha$ — мера в $\mathbb{U}^2$, задаваемая равенством $d\sigma_\alpha = (1 - |z_1|^2)^{\alpha_1} (1 - |z_2|^2)^{\alpha_2} d\lambda(z_1, z_2)$, где $d\lambda(z_1, z_2)$ — мера Лебега.

Интегральное представление (1) в круге впервые было получено в работах [2] и [3] М. М. Джрбашяна для голоморфных функций класса $H^p(\alpha)$ ($\alpha > -1$, $p \geq 1$), введенных в этих работах.

Формула (1) дает ортогональное разложение функции u в $L^2(d\sigma_\alpha)$. Это позволяет выписать решение u_α уравнения

$$\bar{\partial}u = f, \quad (2)$$

имеющее минимальную весовую L^2 -норму, а именно, $u_\alpha = T_\alpha[f]$. Среди всех решений (2) u_α является в некотором смысле «каноническим», и для приложений нужны оценки этого решения в различных нормах. В [1] даны оценки u_α в L^p -норме, т. е.

$$\|u_\alpha\|_{L^p(\mathbb{U}^2)} \leq \gamma(\|f_1\|_{L^p(\mathbb{U}^2)} + \|f_2\|_{L^p(\mathbb{U}^2)}), \quad (3)$$

где $p \in [1, +\infty]$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, константа γ зависит лишь от α и p . Несколько ранее в работе Ландуччи [4] была получена оценка (3) при $\alpha = (0, 0)$ и $p = \infty$, а в [5] тем же автором дана оценка производных решения u_0 . Настоящая работа посвящена оценке u_α в норме пространства $C^m(\overline{\mathbb{U}^2})$.

Ниже используются следующие обозначения:

$C^m(\overline{\mathbb{U}^2})$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $\overline{\mathbb{U}^2}$ функций h , $\|h\|_m$ — норма в $C^m(\overline{\mathbb{U}^2})$;

$C_{(0,1)}^m(\overline{\mathbb{U}^2})$ — пространство форм $f = f_1 d\bar{z}_1 + f_2 d\bar{z}_2$ типа $(0,1)$, коэффициенты которых принадлежат $C^m(\overline{\mathbb{U}^2})$, $\|f\|_m = \|f_1\|_m + \|f_2\|_m$;

$C^{m+\sigma}(\overline{\mathbb{U}^2})$ — пространство тех функций из $C^m(\overline{\mathbb{U}^2})$, у которых все производные порядка m удовлетворяют в $\mathbb{U}^2$ условию Гельдера с показателем σ , где $0 < \sigma < 1$;

$$\bar{\partial}u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} d\bar{z}_2.$$

Всюду в дальнейшем предполагается условие $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Л е м м а 1. Пусть $u \in C^m(\overline{\mathbb{U}^2})$, $r+s \leq m$, $r \geq 1$, $s \geq 0$. Тогда имеет место следующее тождество:

$$\begin{aligned} P_\alpha \left[\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right] (z) &= P_\alpha \left[\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right] (z) - \\ &- (r-1) P_\alpha \left[\zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right] (z) + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} P_\alpha \left[\zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right] (z). \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичное тождество имеет место и относительно переменной z_2 при условии $r \geq 0$, $s \geq 1$.

Смысл соотношения (4) заключается в том, что проекция P_α производной от u выражается через проекции производных порядка на единицу меньше от функции u и $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1}$. Сомножители типа $\zeta_1^r \zeta_2^s$ появляются здесь по чисто техническим причинам.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначив

$$C_\alpha(\zeta, z) = \frac{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)}{(2\pi i)^2} \frac{(1 - |\zeta_1|^2)^{\alpha_1}}{(1 - \bar{\zeta}_1 z_1)^{\alpha_1+2}} \frac{(1 - |\zeta_2|^2)^{\alpha_2}}{(1 - \bar{\zeta}_2 z_2)^{\alpha_2+2}},$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta_1}(\zeta_1^r \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z)) &= r \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) - \alpha_1 \zeta_1^r \bar{\zeta}_1 \zeta_2^s \frac{C_\alpha(\zeta, z)}{1 - |\zeta_1|^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1}(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z)) &= \\ &= \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) - \alpha_1 \zeta_1^r \bar{\zeta}_1 \zeta_2^s \frac{C_\alpha(\zeta, z)}{1 - |\zeta_1|^2} + (\alpha_1 + 2) \zeta_1^{r-1} \bar{\zeta}_1 \zeta_2^s z_1 \frac{C_\alpha(\zeta, z)}{1 - \bar{\zeta}_1 z_1}, \\ \frac{\partial}{\partial z_1} C_\alpha(\zeta, z) &= (\alpha_1 + 2) \bar{\zeta}_1 \frac{C_\alpha(\zeta, z)}{1 - \bar{\zeta}_1 z_1}. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta_1}(\zeta_1^r \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z)) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1}(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z)) + (r-1) \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) - \\ &- \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} C_\alpha(\zeta, z). \quad (5) \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} P_\alpha \left[\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right] (z) &= \int_{\mathbb{D}_2} \zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} C_\alpha(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 = \\ &= \int_{\mathbb{U}^2} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \left(\frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^r \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) \right) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 - \\ &- \int_{\mathbb{U}^2} \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} [\zeta_1^r \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z)] d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2. \quad (6) \end{aligned}$$

По формуле Стокса первое слагаемое в правой части (6) равно

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{U}^2} d\zeta_1 \left(\frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^r \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 \right) &= \\ &= \int_{\{|\zeta_1|=1, |\zeta_2| \leq 1\}} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^r \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 = 0, \end{aligned}$$

так как $C_\alpha(\zeta, z) \equiv 0$ при $|\zeta_1| = 1$. С учетом этого, а также равенства (5), из (6) имеем

$$\begin{aligned} P_\alpha \left[\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right] (z) &= - \int_{\mathbb{U}^2} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} [\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z)] d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 - \\ &- (r-1) \int_{\mathbb{U}^2} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 + \\ &+ z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_{\mathbb{U}^2} \frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\mathbb{U}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \left(\frac{\partial^{r-1+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) \right) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 + \\
&\quad + \int_{\mathbb{U}^2} \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-1} \zeta_2^s C_\alpha(\zeta, z) d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2 - \\
&\quad - (r-1) P_\alpha \left[\zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right] (z) + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} P_\alpha \left[\zeta_1^{r-1} \zeta_2^s \frac{\partial^{r-1+s} u}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \right] (z). \quad (7)
\end{aligned}$$

Равенство нулю первого слагаемого в правой части (7) доказывается с помощью формулы Стокса как выше. Таким образом, из (7) следует утверждение леммы. $\square$

Л е м м а 2. Пусть $u \in C^{m+\sigma}(\overline{\mathbb{U}^2})$, $0 < \sigma < 1$. Тогда

$$T_\alpha[\bar{\partial}u] \in C^{m+\sigma}(\overline{\mathbb{U}^2}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1) имеем

$$T_\alpha[\bar{\partial}u](z) = u(z) - P_\alpha[u](z).$$

Тот факт, что $P_\alpha[u] \in C^{m+\sigma}(\overline{\mathbb{U}^2})$ при $m = 0$, доказывается элементарно с привлечением леммы Харди–Литтльвуда. При $m > 0$ следует использовать соотношение

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} P_\alpha[u](z) = P_\alpha \left[\zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} \right] (z) - P_\alpha \left[\bar{\zeta}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1} \right] (z),$$

(а также аналогичное относительно переменной z_2), которое является частным случаем (4) и следует из него при $r = 1$, $s = 0$. $\square$

С л е д с т в и е. Если $u \in C^{m+1}(\overline{\mathbb{U}^2})$, то $T_\alpha[\bar{\partial}u] \in C^m(\overline{\mathbb{U}^2})$.

Всюду ниже через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ обозначаются константы, зависящие только от r, s и α .

Л е м м а 3. Пусть

а) $u \in C^m(\overline{\mathbb{U}^2})$, $\bar{\partial}u \in C_{(0,1)}^m(\overline{\mathbb{U}^2})$;

б) $P_\alpha[u] \equiv 0$ в $\mathbb{U}^2$.

Тогда для $r + s \leq m$ имеет место оценка

$$\left\| \frac{\partial^{r+s} u}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_1 \|\bar{\partial}u\|_{r+s}. \quad (8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $r \geq 1$. Применяя рекуррентную формулу (4) последовательно r раз, получим

$$\begin{aligned}
P_\alpha \left[\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right] (z) &= \sum_{k=1}^r \sum_{p=0}^{k-1} a_{kp} z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} P_\alpha \left[\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right] (z) + \\
&\quad + \sum_{p=0}^r c_p z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} P_\alpha \left[\zeta_2^s \frac{\partial^s u}{\partial \zeta_2^s} \right] (z).
\end{aligned}$$

Если $s = 0$, то второе слагаемое в правой части этого равенства равно нулю в силу условия б). Если же $s \geq 1$, то, применяя аналог (4) по переменной z_2 последовательно s раз и учитывая а), из последнего равенства получим

$$P_\alpha \left[\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right] (z) = \sum_{k=1}^r \sum_{p=0}^{k-1} a_{kp} z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} P_\alpha \left[\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right] (z) + \\ + \sum_{k=1}^s \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=0}^r b_{kpq} z_1^p z_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} P_\alpha \left[\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s-k+1} u}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right] (z). \quad (9)$$

Здесь коэффициенты a_{kp} , c_p и b_{kpq} зависят от r и s . Используя (1) и (9), получим

$$z_1^r z_2^s \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} = P_\alpha \left[\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right] (z) - T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right] (z) = \\ = \sum_{k=1}^r \sum_{p=0}^{k-1} a_{kp} z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} \left\{ \bar{z}_1 z_1^{r-k} z_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u(z)}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1^{r-k} \partial z_2^s} - T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) \right] (z) \right\} \\ + \sum_{k=1}^s \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=0}^r b_{kpq} z_1^p z_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} \left\{ \bar{z}_2 z_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u(z)}{\partial \bar{z}_2 \partial z_2^{s-k}} - \right. \\ \left. - T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) \right] \right\} - T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right] (z). \quad (10)$$

Отметим при этом, что для справедливости формулы (1) достаточно, чтобы функция u и коэффициенты формы $\bar{\partial} u$ (понимаемые в обобщенном смысле), были бы непрерывны на $\bar{\mathbb{U}}^2$. Доказывается это утверждение стандартным способом регуляризации, как это сделано, к примеру, в [6] в отношении формулы Коши–Грина. Из (10) имеем

$$\left\| z_1^r z_2^s \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_2 \|\bar{\partial} u\|_{r+s-1} + \\ + \gamma_3 \sum_{k=1}^r \sum_{p=0}^{k-1} \left\| z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) \right] (z) \right\|_0 + \\ + \gamma_4 \sum_{k=1}^s \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=0}^r \left\| z_1^p z_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) \right] (z) \right\|_0 + \\ + \left\| T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right] (z) \right\|_0. \quad (11)$$

В полученном неравенстве справа участвуют производные функций $T_\alpha [\bar{\partial}(\dots)]$ порядка не выше, чем $r + s - 1$. Это позволяет проводить индуктивные рассуждения относительно порядка производной.

Докажем неравенство

$$\left\| z_1^r z_2^s \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_5 \|\bar{\partial} u\|_{r+s}. \quad (12)$$

Из (10) при $r = 1$, $s = 0$ имеем

$$\left\| z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right\|_0 \leq \gamma_2 \|\bar{\partial} u\|_0 + \gamma_3 \left\| T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1} \right) \right] \right\|_0 + \left\| T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} \right) \right] \right\|_0. \quad (13)$$

Заметим теперь, что из (3) при $p = \infty$ и для непрерывной на $\overline{\mathbb{U}^2}$ формы f следует оценка

$$\|T_\alpha[f]\| \leq \gamma \|f\|_0, \quad (14)$$

согласно которой имеем

$$\left\| T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1} \right) \right] \right\|_0 \leq \gamma_4 \left\| \bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1} \right) \right\|_0 \leq \gamma_5 \|\bar{\partial} u\|_1, \quad (15)$$

$$\left\| T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} \right) \right] \right\|_0 \leq \gamma_6 \left\| \bar{\partial} \left(\zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \zeta_1} \right) \right\|_0 \leq \gamma_7 \|\bar{\partial} u\|_1. \quad (16)$$

Из (13), (15) и (16) следует

$$\left\| z_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} \right\|_0 \leq \gamma_8 \|\bar{\partial} u\|_1.$$

Аналогичное неравенство верно и для $z_2 \frac{\partial u}{\partial z_2}$. Итак, для производных первого порядка оценка (12) справедлива. Предположим, что (12) имеет место для всех производных порядка меньше, чем $r + s$. Применяя это индуктивное предположение к функциям

$$T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) \right] (z) \quad \text{и} \quad T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) \right] (z),$$

(при этом учитываем, что соответствующее условие гладкости а) обеспечивается в силу следствия леммы 2, а условие б) следует из того, что $P_\alpha \circ T_\alpha = 0$), будем иметь

$$\begin{aligned} & \left\| z_1^p \frac{\partial^p}{\partial z_1^p} T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1 \zeta_1^{r-k} \zeta_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-k} \partial \zeta_2^s} \right) \right] (z) \right\|_0 \leq \\ & \leq \gamma_9 \left\| \bar{\partial} \left(\bar{z}_1 z_1^{r-k} z_2^s \frac{\partial^{r+1-k+s} u(z)}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1^{r-k} \partial z_2^s} \right) \right\|_p \leq \gamma_9 \|\bar{\partial} u\|_{p+r+1-k+s} \leq \gamma_9 \|\bar{\partial} u\|_{r+s}, \end{aligned} \quad (17)$$

так как $p + r + 1 - k + s \leq r + s$,

$$\left\| z_1^p z_2^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial z_1^p \partial z_2^q} T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2 \zeta_2^{s-k} \frac{\partial^{s+1-k} u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_2 \partial \zeta_2^{s-k}} \right) \right] (z) \right\|_0 \leq \gamma_{10} \|\bar{\partial} u\|_{r+s}, \quad (18)$$

так как $p + q + s + 1 - k \leq r + s$. Из (14) следует

$$\left\| T_\alpha \left[\bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right] (z) \right\|_0 \leq \gamma_{11} \left\| \bar{\partial} \left(\zeta_1^r \zeta_2^s \frac{\partial^{r+s} u(\zeta)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \right) \right\|_0 \leq \gamma_{11} \|\bar{\partial} u\|_{r+s}. \quad (19)$$

Подставляя (17)–(19) в (11), получаем оценку (12). Отметим, что сомножитель $z_1^r z_2^s$ в левой части этой оценки не связан с существом дела и возник он из тождества (4) леммы 1. Освободимся от этого сомножителя. Применяя при фиксированном z_2 формулу Коши–Грина к функции $\frac{\partial^{r+s}u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s}$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{r+s}u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s}u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s+1}u(\zeta_1, z_2)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \frac{d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1}{\zeta_1 - z_1} = J_1(z) + J_2(z). \end{aligned} \quad (20)$$

Оценка

$$\|J_2\|_0 \leq \gamma_{12} \left\| \frac{\partial^{r+s+1}u(z)}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_{12} \|\bar{\partial}u\|_{r+s} \quad (21)$$

известна еще со времен Данжуа. Далее

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s}u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^r \partial \zeta_2^s} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} d\zeta_1 \left(\frac{\partial^{r+s-1}u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \right) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s-1}u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_1} \frac{\partial^{r+s-1}u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{d\bar{\zeta}_1}{\zeta_1 - z_1} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s-1}u(\zeta_1, z_2)}{\partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1 - z_1)^2} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1|=1} \frac{\partial^{r+s}u(\zeta_1, z_2)}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial \zeta_1^{r-1} \partial \zeta_2^s} \frac{d\bar{\zeta}_1}{\zeta_1 - z_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценку $J_1(z)$ будем проводить отдельно для $|z_1| < \frac{1}{2}$ и для $|z_1| \geq \frac{1}{2}$. Из (22) имеем

$$\begin{aligned} \max_{|z_1| < \frac{1}{2}} |J_1(z)| &\leq \gamma_{13} \left\| \frac{\partial^{r+s-1}u(z)}{\partial z_1^{r-1} \partial z_2^s} \right\|_0 + \gamma_{14} \left\| \frac{\partial^{r+s}u(z)}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1^{r-1} \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \\ &\leq \gamma_{13} \left\| \frac{\partial^{r+s-1}u(z)}{\partial z_1^{r-1} \partial z_2^s} \right\|_0 + \gamma_{14} \|\bar{\partial}u\|_{r+s-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (20), (21) и (23) следует

$$\max_{|z_1| < \frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^{r+s}u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right|_0 \leq \gamma_{15} \left(\left\| \frac{\partial^{r+s-1}u(z)}{\partial z_1^{r-1} \partial z_2^s} \right\|_0 + \|\bar{\partial}u\|_{r+s} \right). \quad (24)$$

Неравенство (24) позволяет доказать утверждение (8) леммы индукцией по $r+s$. При $r=s=0$ (8) следует из (12). Предположим, что (8) справедливо для всех производных порядка $r+s-1$. Далее различаем 2 случая:

1) Если $s = 0$, то

$$\max_{|z_1| \geq \frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^r u(z)}{\partial z_1^r} \right| \leq 2^r \left\| z_1^r \frac{\partial^r u}{\partial z_1^r} \right\|_0 \leq \gamma_{16} \|\bar{\partial} u\|_r$$

согласно (12). Вместе с (24) и индуктивным предположением отсюда получаем (8).

2) Если $s > 0$, то имеем оценку

$$\max_{|z_1| < \frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right| \leq \gamma_{17} \left(\left\| \frac{\partial^{r+s-1} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^{s-1}} \right\|_0 + \|\bar{\partial} u\|_{r+s} \right), \quad (25)$$

аналогичную (24). Далее

$$\max_{\{|z_1| \geq \frac{1}{2}, |z_2| \geq \frac{1}{2}\}} \left| \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right| \leq 2^{r+s} \left\| z_1^r z_2^s \frac{\partial^{r+s} u(z)}{\partial z_1^r \partial z_2^s} \right\|_0 \leq \gamma_{18} \|\bar{\partial} u\|_{r+s} \quad (26)$$

согласно (12). Из (24)–(26) и индуктивного предположения следует (26).

Лемма доказана. $\square$

Т е о р е м а . Пусть f — $\bar{\partial}$ -замкнутая форма типа $(0, 1)$, $f \in C_{(0,1)}^m(\bar{\mathbb{U}}^2)$, u_α — решение уравнения (2), имеющее минимальную норму в $L^2(d\sigma_\alpha)$, т. е. $u_\alpha = T_\alpha[f]$, и $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Тогда

- 1) $u_\alpha \in C^m(\mathbb{U}^2)$;
- 2) $\|u_\alpha\| \leq \gamma \|f\|_m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим $f_n(z) = f((1 - \frac{1}{n})z)$. Формы f_n $\bar{\partial}$ -замкнуты в некоторой окрестности $\bar{\mathbb{U}}^2$ (каждая в своей). Пусть v_n — какое-либо решение уравнения $\bar{\partial} v = f_n$ в упомянутой окрестности. В силу эллиптичности оператора $\bar{\partial}$ v_n принадлежит $C^{m+\sigma}(\bar{\mathbb{U}}^2)$ для любого σ , $0 < \sigma < 1$. Возьмем функцию $u_{\alpha n} = v_n - P_\alpha[v_n]$. Очевидно

$$P_\alpha[u_n] = 0. \quad (27)$$

Так как функция $P_\alpha[v_n]$ голоморфна в $\mathbb{U}^2$, то

$$\bar{\partial} u_{\alpha n} = f_n. \quad (28)$$

По формуле (1) с учетом (27) $u_{\alpha n} = T_\alpha[\bar{\partial} v_n]$ и, как следует из леммы 2, $u_{\alpha n} \in C^{m+\sigma}(\bar{\mathbb{U}}^2)$. (Для наших целей достаточно того, чтобы $u_{\alpha n} \in C^m(\bar{\mathbb{U}}^2)$). Из леммы 3 следует, что

$$\|u_{\alpha n}\|_m \leq \gamma_{19} \|f_n\|_m, \quad (29)$$

$$\|u_{\alpha n} - u_{\alpha k}\|_m \leq \gamma_{20} \|f_n - f_k\|_m. \quad (30)$$

Поскольку правая часть (30) стремится к нулю при $k, n \rightarrow \infty$, то последовательность $u_{\alpha n}$ имеет предел $u_\alpha^* \in C^m(\bar{\mathbb{U}}^2)$. Переходя к пределу в равенствах (27) и (28), будем иметь $P_\alpha[u_\alpha^*] = 0$ и $\bar{\partial} u_\alpha^* = f$ (при $m = 0$ это равенство понимается в обобщенном смысле). Это означает, что u_α^* является минимальным решением (2) в $L^2(d\sigma_\alpha)$, т. е. $u_\alpha^* = u_\alpha$. Предельный переход в (29) дает оценку 2). Теорема доказана. $\square$

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. Բազմաշրջանում $\bar{\partial}$ -հավասարման մինիմալ լուծումների C^m -նորմով գնահատումը (ամփոփում)

Աշխատանքում հետազոտվում է բազմաշրջանում $\bar{\partial}u = f$ հավասարման այն u_α լուծումը, որը $(1 - |z_1|^2)^{\alpha_1} \cdots (1 - |z_n|^2)^{\alpha_n}$ կշռով L^2 փարածության մեջ ունի մինիմալ նորմ: Պարզության համար դիֆարկվում է երկշրջանի դեպքը: Ապացուցվում է, որ եթե $f \in C_{(0,1)}^m(\bar{\mathbb{U}}^2)$, ապա $u_\alpha \in C^m(\bar{\mathbb{U}}^2)$, և փոփոխում է $\|u\|_m \leq \gamma \|f\|_m$ անհավասարությունը, որտեղ γ -ն միայն α -ից և m -ից կախված հաստատվում է:

A. I. PETROSYAN. The estimate in C^n -norm of the minimal solutions of $\bar{\partial}$ -equation in polydisc (summary)

The article is devoted to the investigation of the solution u_α of equation $\bar{\partial}u = f$ in polydisc, which has the minimal norm in the space L^2 with the weight $(1 - |z_1|^2)^{\alpha_1} \cdots (1 - |z_n|^2)^{\alpha_n}$. For simplicity the case of bidisc $\mathbb{U}^2$ is considered. It is proved that if $f \in C_{(0,1)}^m(\bar{\mathbb{U}}^2)$, then $u_\alpha \in C^m(\bar{\mathbb{U}}^2)$ and we have the estimate $\|u\|_m \leq \gamma \|f\|_m$, where γ is a constant, which depends only on α and m .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *P. Charpentier*. Formules explicites pour les solutions minimales de l'équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$, Ann. Inst. Fourier, 30, №4, 1980, 121–154.
2. *М. М. Джрбашян*. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм. ССР, 3, №1, 1945, 3–9.
3. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та матем. и мех. АН Арм. ССР, вып. 2, 1948, 3–40.
4. *M. Landucci*. On the projection on $L^2(\mathbb{D})$ into $H(\mathbb{D})$, Duke Math. J., 42, 1975, 231–237.
5. *M. Landucci*. Uniform bounds on derivatives for the $\bar{\partial}$ -problem in the polydisc, Proc. Symp. Pure Math., 30, 1977, 177–180.
6. *G. M. Henkin, J. Leiterer*. Theory of functions on complex manifolds, Akademie-Verlag, Berlin, 1984.