КРАТКОЕ СООБЩЕНИЕ

Известия НАН Армении. Математика, **38**, *№ 1, 2003, 83–88*

ПРОИЗВОДНЫЕ РЕШЕНИЯ $\bar\partial$-УРАВНЕНИЯ В БИДИСКЕ

А. И. Петросян

Ереванский Государственный Университет
e-mail: albpet@xter.net

1. В единичном бидиске решение уравнения

$$\bar\partial u = f, \quad \text{где} \quad \bar\partial u = \frac{\partial u}{\partial \bar z_1}\, d\bar z_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar z_2}\, d\bar z_2 \tag{1}$$

было получено в работах [1], [2], используя интегральное представление гладких функций

$$u(z) = P[u](z) + T[\bar\partial u](z), \tag{2}$$

которое является многомерным аналогом формулы Коши–Грина.

Заметим, что $P[u]$ — это «аналитическая часть» функции $u(z)$, которая является интегралом типа Коши от $u(z)$. Это свойство позволяет выписать в явном виде «каноническое» решение $\bar\partial$-уравнения $u_0 = T[f]$.

Поскольку в (2) слагаемое $P[u]$ является ортогональной проекцией u в пространстве L^2 на остове бидиска на подпространство голоморфных функций, то среди решений уравнения (1) u_0 имеет минимальную L^2-норму.

Ниже получены явные формулы для производных решений.

2. Будем пользоваться следующими обозначениями :

$\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_k| < 1, \ \ k = 1, \dots, n\}$ — единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$;

$\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_k| = 1, \ k = 1, \dots, n\}$ — остов полидиска $\mathbb{D}^n$;

$C^m(\overline{\mathbb{D}^n})$ (соответственно, $C^m(\mathbb{T}^n)$) — множество функций, которые m раз непрерывно дифференцируемы на $\overline{\mathbb{D}^n}$ (соответственно, на $\mathbb{T}^n$) ;

$C^m_{(0,1)}(\overline{\mathbb{D}^n})$ — множество дифференциальных форм типа $(0,1)$ с коэффициентами, принадлежащими $C^m(\overline{\mathbb{D}}^n)$.

Для функции u, заданной на остове $\mathbb{T}^n$, через $P[u](z)$ обозначается ее n-кратный интеграл типа Коши

$$P[u](z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{u(\zeta) d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{\prod_{k=1}^n (\zeta_k - z_k)}, \tag{3}$$

где $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{T}^n, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{D}^n$.

Для операторов дифференцирования будем пользоваться краткими обозначениями : $D_k = \dfrac{\partial}{\partial z_k}, \quad \overline{D}_k = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k}, \quad D^r = D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n}$, для заданного мультииндекса $r = (r_1, \ldots, r_n)$ положим $|r| = r_1 + \cdots + r_n$.

3. Ниже применяем операторы дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial \zeta_k}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_k}$ к функциям из класса $C^m(\mathbb{T}^n)$. Согласно теореме Уитни (см. например, [3]) функции из $C^m(\mathbb{T}^n)$ можно продолжить в окрестность остова $\mathbb{T}^n$ с сохранением класса гладкости. Упомянутые операции дифференцирования применяются именно к продолжениям функций. Для последних будем пользоваться теми же обозначениями, что и для исходных функций.

Следующие две леммы справедливы для произвольного n.

Лемма 1. *Пусть* $g \in C^1(\mathbb{T}^n), \quad 1 \le k \le n$. *Тогда*

$$P\left[\frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k}\right](z) = P\left[\bar{\zeta}_k^2 \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k}\right](z) + \frac{\partial}{\partial z_k} P[g](z). \tag{4}$$

Доказательство: При фиксированном $z \in \mathbb{D}^n$ рассмотрим дифференциальную форму типа $(n-1, 0)$

$$\omega = \frac{(-1)^{k-1} g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} \bigwedge_{i \ne k} d\zeta_i.$$

Используя формулу Стокса, получим

$$0 = \int\limits_{\mathbb{T}^n} d_\zeta \omega = \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \frac{g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n +$$
$$+ \sum_{j=1}^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \frac{(-1)^{k-1} g(\zeta)}{\prod_{j=1}^n (\zeta_j - z_j)} d\bar{\zeta}_j \wedge \Big(\bigwedge_{i \ne k} d\zeta_i\Big).$$

Поскольку $\zeta_j \bar{\zeta}_j = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ на $\mathbb{T}^n$, то имеем $\zeta_j d\bar{\zeta}_j = -\bar{\zeta}_j d\zeta_j$. Следовательно

$$(-1)^{k-1} d\bar{\zeta}_j \wedge \Big(\bigwedge_{i \ne k} d\zeta_i\Big) = \begin{cases} -\bar{\zeta}_k^2 d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \ne k. \end{cases} \tag{6}$$

Итак, из (5) получим

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \frac{d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} - \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{g(\zeta) d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(\zeta_k - z_k)^2 \prod_{i\neq k} (\zeta_i - z_i)} - \\ - \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar\zeta_k} \frac{\bar\zeta_k^2 d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} = 0. \qquad (7)$$

С учетом равенства

$$\frac{1}{(\zeta_k - z_k)^2} = \frac{\partial}{\partial z_k} \frac{1}{\zeta_k - z_k}$$

из (7) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \zeta_k} \frac{d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} = \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial g(\zeta)}{\partial \bar\zeta_k} \frac{\bar\zeta_k^2 d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)} + \\ + \frac{\partial}{\partial z_k} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \frac{g(\zeta) d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{\prod_{i=1}^n (\zeta_i - z_i)}.$$

Отсюда вытекает (4). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого $u \in C^m(\mathbb{T}^n)$ и мультииндекса r с $|r| \leq m$ имеет место формула*

$$P[D^r u](z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_j=1}^{r_j} D_1^{r_1} \cdots D_{j-1}^{r_{j-1}} D_j^{r_j - k_j} P\left[\bar\zeta_j^2 \overline{D}_j D_j^{k_j - 1} D_{j+1}^{r_{j+1}} \cdots D_n^{r_n} u\right](z) + \\ + D^r P[u](z).$$

Если $r_1 + \cdots + r_j - k_j = 0$, то оператор дифференцирования под знаком двойной суммы в (8) считается тождественным оператором.

Доказательство: Взяв в лемме 1 $g(z) = D_1^{r_1 - 1} D_2^{r_2} \cdots D_n^{r_n} u(z)$ и $k = 1$, получим реккурентное соотношение

$$P[D^r u](z) = P\left[\bar\zeta_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - 1} D_2^{r_2} \cdots D_n^{r_n} u\right](z) + D_1 P\left[D_1^{r_1 - 1} D_2^{r_2} \cdots D_n^{r_n} u\right](z). \qquad (9)$$

Применив (9) r_1 раз, получим

$$P[D^r u](z) = P\left[\bar\zeta_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - 1} D_2^{r_2} \cdots D_n^{r_n} u\right](z) + \\ + D_1 \left\{ P\left[\bar\zeta_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - 2} D_2^{r_2} \cdots D_n^{r_n} u\right](z) + D_1 P\left[D_1^{r_1 - 2} D_2^{r_2} \cdots D_n^{r_n} u\right](z) \right\} = \cdots \\ = \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{r_1 - k_1} P\left[\bar\zeta_1^2 \overline{D}_1 D_1^{k_1 - 1} D_2^{r_2} \cdots D_n^{r_n} u\right](z) + D^{r_1} P\left[D_2^{r_2} \cdots D_n^{r_n} u\right](z).$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части (10) не содержит производных по ζ_1. Применив формулу (4) последовательно по переменным $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$, выбирая каждый раз соответствующим образом k и $g(z)$, получим (8). Лемма 2 доказана.

4. Приведем конкретный вид двумерного аналога интегрального представления в бидиске

$$u = P[u] + T[\bar{\partial} u]. \tag{11}$$

Здесь $P[u]$ — двумерный интеграл Коши, определенный в (3), а оператор T задается следующим образом :

$$\begin{aligned} T[\bar{\partial} u] = T[\bar{\partial} u](z_1, z_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{D}^1} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_1}(\zeta_1, z_2) \frac{d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} - \int\limits_{\mathbb{D}^1} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}_2}(z_1, \zeta_2) \frac{d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} + \\ + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{D}^2} \bar{\partial} u(\zeta_1, \zeta_2) \wedge \frac{(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) d\bar{\zeta}_2 - (\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) d\bar{\zeta}_1}{|\zeta - z|^4} \wedge d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \\ + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{D}^1 \times \mathbb{T}^1} \bar{\partial} u(\zeta_1, \zeta_2) \wedge \frac{\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2}{(\zeta_1 - z_1)(|\zeta - z|^2} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 + \\ + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{T}^1 \times \mathbb{D}^1} \bar{\partial} u(\zeta_1, \zeta_2) \wedge \frac{\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1}{(\zeta_2 - z_2)(|\zeta - z|^2} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Лемма 3. *Пусть $u \in C^m(\overline{\mathbb{D}^2})$, $\quad \bar{\partial} u \in C^m_{(0,1)}(\overline{\mathbb{D}^2})$, и $r_1 + r_2 \leq m$. Тогда*

$$\begin{aligned} D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(z) = r_1 \bar{z}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - 1} D_2^{r_2} u(z) + r_2 \bar{z}_2^2 \overline{D}_2 D_1^{r_1} D_2^{r_2 - 1} u(z) - \\ - \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{k_1 - 1} T \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - k_1} D_2^{r_2} u(\zeta) \right) \right](z) - \\ - \sum_{k_2=1}^{r_2} D_1^{r_1} D_2^{k_2 - 1} T \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_2^2 \overline{D}_2 D_2^{r_2 - k_2} u(\zeta) \right) \right](z) + \\ + T \left[\bar{\partial} \left(D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(\zeta) \right) \right](z) + D_1^{r_1} D_2^{r_2} P[u](z). \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство: Заметим, что для двумерного случая формулу (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P\left[D_1^{r_1} D_2^{r_2} u \right](z) = \sum_{k_1=1}^{r_1} D_1^{k_1 - 1} P \left[\bar{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - k_1} D_2^{r_2} u(\zeta) \right](z) + \\ + \sum_{k_2=1}^{r_2} D_1^{r_1} D_2^{k_2 - 1} P \left[\bar{\zeta}_2^2 \overline{D}_2 D_2^{r_2 - k_2} u(\zeta) \right](z) + D_1^{r_1} D_2^{r_2} P[u](z). \end{aligned} \tag{14}$$

Применив (11) к функции $D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(z)$, получим

$$D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(z) = P\left[D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(\zeta) \right](z) + T\left[\bar{\partial} D_1^{r_1} D_2^{r_2} u(\zeta) \right](z). \tag{15}$$

Далее, применяя (11) к интегралам Коши в правой части (14), получим

$$\begin{aligned} P\left[\bar{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - k_1} D_2^{r_2} u(\zeta) \right](z) = \bar{z}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - k_1} D_2^{r_2} u(z) - \\ - T \left[\bar{\partial} \left(\bar{\zeta}_1^2 \overline{D}_1 D_1^{r_1 - k_1} D_2^{r_2} u(\zeta) \right) \right](z), \end{aligned} \tag{16}$$

$$P\left[\bar\zeta_2^2\overline{D}_2 D_2^{r_2-k_2}u(\zeta)\right](z)=\bar z_2^2\overline{D}_2 D_2^{r_2-k_2}u(z)-T\left[\bar\partial\left(\bar\zeta_2^2\overline{D}_2 D_2^{r_2-k_2}u(\zeta)\right)\right](z). \quad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в (14), а затем полученное в (15), получим

$$\begin{aligned}
&D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(z)=\\
&\quad=\sum_{k_1=1}^{r_1}D_1^{k_1-1}\left\{\bar z_1^2\overline{D}_1 D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}u(z)-T\left[\bar\partial\left(\bar\zeta_1^2\overline{D}_1 D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right)\right](z)\right\}+\\
&\quad+\sum_{k_2=1}^{r_2}D_1^{r_1}D_2^{k_2-1}\left(\bar z_2^2\overline{D}_2 D_2^{r_2-k_2}u(z)-T\left[\bar\partial\left(\bar\zeta_2^2\overline{D}_2 D_2^{r_2-k_2}u(\zeta)\right)\right](z)\right\}+\\
&\quad+T\left[\bar\partial D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(\zeta)\right](z)+D_1^{r_1}D_2^{r_2}P[u](z).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает (13). Лемма 3 доказана.

Теорема. *Пусть $f(z)=f_1(z)d\bar z_1+f_2(z)d\bar z_2$ — $\bar\partial$-замкнутая форма типа $(0,1)$ и $f\in C^m_{(0,1)}(\overline{\mathbb{D}^2})$. Тогда функция $u_0(z)=T[f](z)$ является решением уравнения (1) в $\mathbb{D}^2$, имеющее минимальную норму в $L^2(\mathbb{T}^2)$. Кроме этого, $u_0\in C^m(\overline{\mathbb{D}^2})$ и для производных u_0 имеем*

$$\begin{aligned}
&D_1^{r_1}D_2^{r_2}u(z)=r_1\bar z_1^2 D_1^{r_1-1}D_2^{r_2}f_1(z)+r_2\bar z_2^2 D_1^{r_1}D_2^{r_2-1}f_2(z)-\\
&-\sum_{k_1=1}^{r_1}D_1^{k_1-1}T\left[\bar\partial\left(\bar\zeta_1^2 D_1^{r_1-k_1}D_2^{r_2}f_1(\zeta)\right)\right](z)-\\
&-\sum_{k_2=1}^{r_2}D_1^{r_1}D_2^{k_2-1}T\left[\bar\partial\left(\bar\zeta_2^2 D_2^{r_2-k_2}f_2(\zeta)\right)\right](z)+T\left[D_1^{r_1}D_2^{r_2}f(\zeta)\right](z).
\end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство: Как доказано в [1], u_0 является решением уравнения (1). Теперь, записав интеграл Коши (3) в виде

$$P[u](z)=\int\limits_{\mathbb{T}^2}\frac{u(\zeta_1,\zeta_2)dm_2(\zeta)}{(1-\bar\zeta_1 z_1)(1-\bar\zeta_2 z_2)},$$

где $m_2(\zeta)$ — нормированная мера Лебега на торе $\mathbb{T}^2$, убеждаемся, что при фиксированном $z\in\mathbb{D}^2$ $P[u](z)$ является скалярным произведением $u(\zeta)$ и голоморфной (относительно ζ) функции $\left[(1-\bar\zeta_1 z_1)(1-\bar\zeta_2 z_2)\right]^{-1}$. Это означает, что P является оператором ортогонального проектирования в $L^2(\mathbb{T}^2)$ на подпространство голоморфных функций. Из (11) следует, что $P[u_0]=0$, т. е. u_0 ортогонален этому подпространству. Учитывая, что решения уравнения (1) отличаются друг от друга на голоморфное слагаемое, заключаем, что среди решений уравнения (1) u_0 имеет минимальную L^2-норму. Утверждение $u_0\in C^m(\overline{\mathbb{D}^2})$ можно доказать рассуждениями, использованными в [4]. Наконец, (18) следует из леммы 3 и равенств $\bar\partial u_0=f$, $\overline{D}_1 u=f_1$, $\overline{D}_2 u=f_2$ и $P[u_0]=0$. Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е. М. Чирка, ««Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных»», Итоги Науки : Совр. Проб. Мат., ВИНИТИ, т. 4, стр. 13–142, 1975.

2. Ph. Charpentier, “Formules explicities pour les solutions minimales de l'equation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de $\mathbb{C}^n$”, Ann. Inst. Fourier, vol. 30, № 4, pp. 121–154, 1980.

3. B. Malgrange, Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966.

4. А. И. Петросян, «Оценка в C^m-норме минимальных решений $\bar{\partial}$-уравнения в полидиске», Изв. АН Армении, Математика, т. 26, № 2, стр. 99–107, 1991.

Поступила 5 января 2003