ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
Volume 103 2003 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.55

А. И. Петросян

О весовых классах голоморфных функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$

(Представлено академиком В. С. Захаряном 22/IV 2003)

1. В работе анонсируются основные результаты общей теории пространств A^p_ω в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. Рассматриваемые весовые пространства A^p_ω голоморфных в единичном шаре функций сколь угодно широки, ибо зависят от функции-параметра $\omega(x)$ $(0 \leqslant x < 1)$ со сколь угодно быстрым убыванием при $x \to 1-0$.

Приводимые теоремы являются многомерными ω-аналогами результатов М.М. Джрбашяна [1], [2] 1945-1948гг., положивших начало теории пространств A^p_α (изначальное обозначение $H^p(\alpha)$) в единичном круге.

Примененный аналитический аппарат позволяет распространить на случай единичного шара одномерную общую теорию, построенную в [3] (см. также [4]). В работе приведена первые, основные результы, полученные этим путем.

Следует отметить, что сама теория пространств $H^p(\alpha)$ М.М. Джрбашяна, относящаяся к частному случаю $\omega(x) = (1-x)^{1+\alpha}$ $(\alpha > -1)$, на случай единичного шара была распространена ранее (см. [5]). Подробнее о недоразумениях, приведших в [5] и других публикациях западных авторов к отсутствию надлежащих ссылок на основополагающие работы М.М. Джрбашяна [1], [2] см. в [3].

2. Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

Через $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^n z_k \overline{w}_k$ будем обозначать скалярное произведение для точек $z, w \in \mathbb{C}^n$, а через $|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ — соответствующую норму;

$\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| < 1\}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$;

$\mathbb{S}_n = \partial\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| = 1\}$ — его граница, являющаяся единичной сферой в $\mathbb{C}^n$;

Всюду ниже число n фиксировано, поэтому мы будем писать просто $\mathbb{B}$ и $\mathbb{S}$ вместо $\mathbb{B}_n$ и $\mathbb{S}_n$.

ν — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, нормированная условием $\nu(\mathbb{B}) = 1$;

σ — борелевская мера на $\mathbb{S}$, инвариантная относительно унитарных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяющая условию $\sigma(\mathbb{S})=1$;

С каждым мультииндексом $s=(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, где

$$\mathbb{Z}_+^n=\{s\in\mathbb{Z}^n:\ s_k\geqslant 0\},$$

будем связывать:

два числа $s!=\prod_{k=1}^n s_k!$ и $|s|=\sum_{k=1}^n s_k$,

оператор дифференцирования $D^s=\frac{\partial^{|s|}}{\partial z_1^{s_1}\ldots\partial z_n^{s_n}}$,

и голоморфный моном $z^s=\prod_{k=1}^n z_k^{s_k}$.

Далее, через Ω будем обозначать множество параметр-функций $\omega(t)$, определенных на интервале $[0,1)$ и удовлетворяющих там условиям

(i) $0<\bigvee\limits_{\delta}^{1-0}\omega<\infty$ для любого $\delta\in[0,1)$;

(ii) $\Delta_m\equiv\Delta_m(\omega)=-\int\limits_0^1 t^m d\omega(t)\neq 0,\ \infty,\qquad m=0,1,\ldots;$

(iii) $\varliminf\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{|\Delta_m|}\geqslant 1.$

Для удобства, всюду ниже будем полагать, что $\omega(1)=\omega(1-0)$.

3. Для заданного $\omega\in\Omega$ введем в рассмотрение ядро-функцию

$$C_{\omega,n}(z,w)=C_\omega(z,w)=\sum_{s\in\mathbb{Z}_+^n}\frac{(n-1+|s|)!}{(n-1)!s!}\frac{z^s\overline{w}^s}{\Delta_{|s|}}. \tag{1}$$

Предложение 1. *При фиксированной точке $w\in\overline{\mathbb{B}}$ функция $C_\omega(z,w)$ голоморфна в шаре $\mathbb{B}$.*

Предложение 2. *Имеет место равенство*

$$C_\omega(z,w)=\sum_{m=0}^\infty\frac{1}{\Delta_m}\frac{(n-1+m)!}{(n-1)!m!}\langle z,w\rangle^m,\quad z\in\mathbb{B},\ \ w\in\overline{\mathbb{B}}.$$

Тем самым, ядро C_ω зависит лишь от скалярного произведения $\langle z,w\rangle$.

4. Для каждой функции $\omega\in\Omega$ определим ассоциированную с ней меру

$$d\mu_\omega(w)=-d\omega(r^2)\,d\sigma(\zeta),$$

где $w=r\zeta$ — полярная форма точки $w\in\mathbb{B}$, (т. е. $\zeta\in\mathbb{S},\ 0\leqslant r\leqslant 1$).

Обозначим через $L^p_\omega = L^p_\omega(\mathbb{B})$ класс функций, измеримых по мере $d\mu_\omega$ в шаре $\mathbb{B}$, для которых

$$\|f\|_{p,\omega} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{B}} |f(w)|^p \, |d\mu_\omega(w)| \right\}^{1/p} < +\infty, \qquad 0 < p < \infty, \tag{2}$$

а через $A^p_\omega = A^p_\omega(\mathbb{B})$ — подмножество L^p_ω, состоящее из функций, голоморфных в $\mathbb{B}$. Как известно, при $1 \leqslant p < \infty$ величина $\|f\|_{p,\omega}$ определяет норму в L^p_ω, в которой L^p_ω является банаховым пространством, а при $0 < p < 1$ L^p_ω является полным метрическим пространством в метрике $\rho(f,g) = \|f-g\|^p_{p,\omega}$.

Имеет место следующее

Предложение 3. *Пусть $0 < p < \infty$, K — компакт, лежащий внутри $\mathbb{B}$. Тогда существует константа $C \equiv C(K,s,p,\omega)$ такая, что*

$$\max_{z \in K} |D^s f(z)| \leqslant C \|f\|_{p,\omega} \tag{3}$$

для всех $f \in L^p_\omega$ и всех $s \in \mathbb{Z}^n_+$.

Пусть $\|f_n - f\|_{p,\omega} \to 0$ при $n \to \infty$ для некоторых $f_n \in A^p_\omega$, $f \in L^p_\omega$. Из (3) следует, что существует голоморфная в $\mathbb{B}$ функция $h(z)$, такая, что $f_n(z) \to h(z)$ равномерно внутри $\mathbb{B}$. Нетрудно показать, что $f = h$. Тем самым справедливо

Предложение 4. *Для каждого $0 < p < \infty$ подпространство A^p_ω замкнуто в $L^p_\omega(\mathbb{B})$.*

Следствие. *При $1 \leqslant p < \infty$ класс A^p_ω является банаховым пространством, а при $0 < p < 1$ — полным метрическим пространством.*

Для произвольной функции f, определенной в $\mathbb{B}$ и $0 < \varrho < 1$, обозначим через f_ϱ ее ϱ-растяжение, т. е. функцию, определенную при $|z| < 1/\varrho$ следующим образом: $f_\varrho(z) = f(\varrho z)$. В следующем предложении утверждается непрерывность ϱ-растяжения в пространстве A^p_ω.

Предложение 5. *Если $f \in A^p_\omega$, то $\|f_\varrho - f\|_{p,\omega} \to 0$ при $\varrho \to 1-0$.*

Следствие. *Голоморфные полиномы плотны в A^p_ω.*

Имеет место основная

Теорема 1. *Пусть $f \in A^p_\omega$. Тогда*

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{B}} f(w) C_\omega(z,w) d\mu_\omega(w), \qquad z \in \mathbb{B} \tag{4}$$

$$f(z) = -\overline{f(0)} + 2 \int\limits_{\mathbb{B}} \{\mathrm{Re}\, f(w)\} C_\omega(z,w) d\mu_\omega(w), \qquad z \in \mathbb{B}. \tag{5}$$

Отметим один частный случай формулы (4). Пусть

$$\omega(x) = n \int\limits_x^1 t^{n-1}(1-t)^\alpha \, dt, \qquad (\alpha > -1).$$

Тогда

$$\Delta_m = -n \int\limits_0^1 x^m d\omega(x) = n \int\limits_0^1 x^{n+m-1}(1-x)^\alpha dx = \frac{n\Gamma(n+m)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(n+m+1+\alpha)}.$$

Тем самым, ввиду предложения 2 и формулы биномиального разложения

$$\begin{aligned} C_\omega(z,w) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}\frac{\langle z,w\rangle^m}{\Delta_m} = \\ = \sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m+1)}\frac{\Gamma(n+m+1+\alpha)}{n\Gamma(n+m)\Gamma(1+\alpha)}\langle z,w\rangle^m = \\ = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)}\sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(n+m+1+\alpha)}{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(m+1)}\langle z,w\rangle^m = \\ = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)}\frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Далее, если $w = r\zeta$, где $|\zeta| = 1$, то, используя выражение для элемента нормированного объема $d\nu$ в полярных координатах [5], получим

$$d\mu_\omega(w) = -d\omega(r^2)\, d\sigma(\zeta) = 2nr^{2n-1}(1-r^2)^\alpha dr\, d\sigma(\zeta) = (1-r^2)^\alpha d\nu(w). \quad (6)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае формула (4) принимает вид

$$f(z) = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_{\mathbb{B}} f(w)\frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, d\nu(w).$$

Эту формулу можно найти в [5]. В одномерном же случае $n = 1$ она впервые была получена в работе М. М. Джрбашяна [1].

Ядро $C_\omega(z,w)$ порождает оператор ортогонального проектирования из L^2_ω на подпространство A^2_ω. А именно, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть*

$$\mathbf{P}_\omega f(z) = \int\limits_{\mathbb{B}} f(w) C_\omega(z,w)\, d\mu_\omega(w), \quad z \in \mathbb{B},$$

где $f \in L^2_\omega$. Тогда $\mathbf{P}_\omega$ является ортогональным проектором из L^2_ω на A^2_ω.

5. Ниже приведено интегральное представление функций из A^2_ω по границе $\mathbb{B}$, в случае, когда ω является квадратом Вольтерра от другой функции $\widetilde{\omega} \in \Omega$. Затем найден некий изометрический оператор, переводящий A^2_ω в обычное пространство Харди в $\mathbb{B}$, который вместе со своим обратным оператором записывается в явном, интегральном виде. Однако, сначала следует отметить, что верно

Предложение 6. *Пусть непрерывно дифференцируемая на* $[0,1)$ *функция* $\widetilde{\omega} \in \Omega$ *такова, что* $\widetilde{\omega}(t) \searrow$, $\widetilde{\omega}(1) = 0$, $\widetilde{\omega}(0) = 1$. *Далее, пусть* ω *является квадратом* $\widetilde{\omega}$ *в смысле Вольтерра, т. е.*

$$\omega(x) = -\int\limits_x^1 \widetilde{\omega}\left(\frac{x}{\sigma}\right) d\widetilde{\omega}(\sigma), \qquad 0 < x < 1.$$

Тогда $\omega \in \Omega$ *и, кроме того,*

$$\Delta_m(\omega) = \left[\Delta_m(\widetilde{\omega})\right]^2, \quad m \geqslant 0. \tag{7}$$

Теорема 3. *Если функция* f *принадлежит* A^2_ω, *то функция*

$$\varphi_0(z) = L_{\widetilde{\omega}} f(z) = -\int\limits_0^1 f(tz)\, d\widetilde{\omega}(t)$$

принадлежит пространству Харди H^2 *в единичном шаре. При этом*

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{S}} \varphi_0(\zeta) C_{\widetilde{\omega}}(z,\zeta)\, d\sigma(\zeta).$$

Кроме того,

$$\|\varphi_0\|_{H^2} = \|f\|_{2,\omega}. \tag{8}$$

Отметим, что в случае, когда $\omega(x) = n\int_x^1 t^{n-1}(1-t)^\alpha\, dt$ $(\alpha > -1)$, соответствующее пространство A^p_ω, следуя [2], будем обозначать через $H^p(\alpha)$. Ввиду (6), условие (2) записывается в виде

$$\|f\|_{H^p(\alpha)} = \left\{\int\limits_{\mathbb{B}} (1-|w|^2)^\alpha |f(w)|^p\, d\nu(w)\right\}^{1/p} < +\infty.$$

Если в теореме 3 взять

$$\widetilde{\omega}(x) = \frac{\Gamma(n + \frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})} \int\limits_x^1 t^{n-1}(1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}} dt,$$

то $A^2_\omega = H^2(\alpha)$. Поэтому из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ принадлежит классу $H^2(\alpha)$, $(\alpha > -1)$. Тогда функция*

$$\varphi_0(z) = \frac{\Gamma(n+\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}\int_0^1 f(tz)t^{n-1}(1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}}dt$$

принадлежит $H^2(\mathbb{B})$ и имеет место интегральное представление

$$f(z) = \int_{\mathbb{S}} \frac{\varphi_0(\zeta)\,d\sigma(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+\frac{\alpha+1}{2}}}.$$

Теорема 4 является многомерным аналогом Теоремы V из [2], при $\alpha = 0$ установленной М. В. Келдышем.

Введем в рассмотрение оператор

$$K_{\widetilde{\omega}}\varphi(z) = \int_{\mathbb{S}} \varphi(\zeta)C_{\widetilde{\omega}}(z,\zeta)\,d\sigma(\zeta).$$

Теорема 5. *Функции класса A^2_ω представимы в виде*

$$f(z) = K_{\widetilde{\omega}}\varphi(z),$$

где φ — произвольная функция из $L^2(\mathbb{S})$.

Следующая теорема, относящаяся к свойствам оператора $K_{\widetilde{\omega}}$, дополняет утверждения теорем 3 и 5.

Теорема 6. Оператор $K_{\widetilde{\omega}}$ обладает следующими свойствами:

1° $K_{\widetilde{\omega}}$ является линейным ограниченным оператором с областью определения $L^2(\mathbb{S})$ и областью значений $A^2_\omega(\mathbb{B})$.

2° Сужение $K_{\widetilde{\omega}}$ на $H^2(\mathbb{S})$ является изометрией между $H^2(\mathbb{S})$ и $A^2_\omega(\mathbb{B})$, при этом обратным оператором этой изометрии является $L_{\widetilde{\omega}}$.

3° Ядром $K_{\widetilde{\omega}}$ служит ортогональное дополнение к $H^2(\mathbb{S})$, т. е.

$$\operatorname{Ker} K_{\widetilde{\omega}} \overset{\text{def}}{=} \{\varphi \in L^2(\mathbb{S})\colon\ K_{\widetilde{\omega}}\varphi = 0\} = H^2_\perp(\mathbb{S}), \quad \text{где} \quad H^2_\perp(\mathbb{S}) \oplus H^2(\mathbb{S}) = L^2(\mathbb{S}).$$

4° $\|K_{\widetilde{\omega}}\| = 1$, а точнее $\|K_{\widetilde{\omega}}\varphi\|_{A^2_\omega(\mathbb{B})} \leqslant \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{S})}$, где знак равенства имеет место в том и только в том случае, если $\varphi \in H^2(\mathbb{S})$.

5° φ_0 минимизирует $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{S})}$ на множестве всех функций φ, для которых $K_{\widetilde{\omega}}\varphi = K_{\widetilde{\omega}}\varphi_0$. Иными словами $\|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{S})} = \min_{\varphi_1 \in H^2_\perp} \|\varphi_0 + \varphi_1\|_{L^2(\mathbb{S})}$.

Ереванский Государственный Университет

Ա. Ի. Պետրոսյան

$\mathbb{C}^n$-ի միավոր գնդում հոլոմորֆ ֆունկցիաների կշռային դասերի վերաբերյալ

Հոդվածում բերված են A^p_ω դասերի ընդհանուր պեսության հիմնական արդյունքները $\mathbb{C}^n$ բազմաչափ փարածության միավոր գնդում: Միավոր գնդում հոլոմորֆ ֆունկցիաների դիփարկված A^p_ω կշռային փարածությունները կամայապես լայն են, քանզի կախված են $\omega(x)$ $(0 \leq x < 1)$ ֆունկցիա-պարամեփրից, որը կարող է կամայական արագությամբ նվազել, երբ $x \to 1$:

Բերված թեորեմները Մ. Մ. Ջրբաշյանի 1945–1948 թթ. այն արդյունքների բազմաչափ ω-համանմաններն են, որոնք սկզբնավորել են A^p_α (սկզբնական նշանակումով՝ $H^p(\alpha)$) դասերի պեսությունը միավոր շրջանում:

Կիրառված անալիփիկ ապարափը թույլ է փվել միավոր գնդի վրա փարածել [3]-ում (պես նաև [4]) կիրառված միաչափ ընդհանուր պեսությունը, ու հոդվածը պարունակում է սփացված առաջին, հիմնական արդյունքները:

Литература

1. *Джрбашян М.М.* – ДАН АрмССР, 1945, Т. 3, №1, С. 3–9.
2. *Джрбашян М.М.* – Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, 1948, Т. 2, С. 3–40
3. *Jerbashian A.M.* Preprint 2002-01, December 12, 2002, Institute of Mathematics, NAS of Armenia.
4. *Джрбашян А.М., Аветисян К.Л* – ДНАН Армении, 2002, Т. 102, №2, С. 105–112.
5. *W. Rudin* Function theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980. Рус. пер: У. Рудин, Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, М., Мир, 1984. 445 с.