ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

34(1970), 1241—1261

УДК 517.5

А. И. ПЕТРОСЯН

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ НА ПОЛИЭДРАХ ВЕЙЛЯ

Доказывается, что всякая функция, голоморфная в невырожденном полиэдре Вейля и непрерывная на его замыкании, равномерно на этом замыкании приближается полиномами.

Введение

Теорема Вейля утверждает, что на полиномиальных полиэдрах Вейля в n-мерном комплексном пространстве C^n всякая функция, голоморфная в окрестности этого полиэдра, равномерно приближается полиномами. Для получения дальнейших результатов естественно возникают две задачи. Первая задача — это вопрос об описании компактов, на которых непрерывные функции, голоморфные во внутренних точках, равномерно аппроксимируются функциями, голоморфными в окрестности компакта. Вторая задача — это доказательство полиномиальной выпуклости конкретных компактов. Обе задачи в данный момент удается решать лишь в некоторых, хотя и существенных, но частных случаях.

По первому вопросу отметим следующие результаты.

ТЕОРЕМА (Хелсон и Куигли ([1])). *Если Γ — дуга в C^n такая, что все ее проекции на координатные плоскости имеют размерность* 1, *то всякая непрерывная на Γ функция равномерно на Γ приближается функциями, голоморфными в окрестности Γ.*

Интересен в этом аспекте результат Е. М. Чирки ([2]) относительно жордановых дуг в C^n, у которых какие-либо $n-1$ проекций являются нигде не плотными множествами.

ТЕОРЕМА (Уэлс ([3])). *Пусть M — вещественно аналитическое многообразие, не допускающее комплексных касательных векторов. Тогда всякая непрерывная на M функция является равномерным пределом на M функций, голоморфных в окрестности M.*

Е. М. Чирка обобщил этот результат на случай непрерывно дифференцируемых многообразий без комплексных касательных векторов [см. ([4])].

Следующая теорема доказана Г. М. Хенкиным ([5]).

ТЕОРЕМА. *Всякая функция, голоморфная внутри строго псевдовыпуклой области D и непрерывная на $\overline{D}$, равномерно на $\overline{D}$ приближается функциями, голоморфными в окрестности $\overline{D}$.*

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть D — невырожденный полиэдр Вейля в пространстве C^n. Тогда любая функция, голоморфная в D и непрерывная в $\overline{D}$, допускает равномерное приближение на $\overline{D}$ функциями, голоморфными в окрестности $\overline{D}$.*

Отметим при этом, что класс невырожденных полиэдров является достаточно широким в том смысле, что всякую область голоморфности можно аппроксимировать изнутри невырожденными полиэдрами Вейля. Невырожденные полиэдры уже рассматривались в разных работах. Например, Бремерманом установлено, что для таких полиэдров Вейля минимальная граница и граница Шилова алгебры функций, голоморфных внутри полиэдра и непрерывных в его замыкании, совпадают с остовом ([6]). В доказательстве теоремы 3.1 использовано интегральное представление голоморфных функций, принадлежащее А. Г. Витушкину, который любезно согласился на его публикацию в этой работе. Из теоремы 3.1 и теоремы Вейля следует

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть D — невырожденный полиномиальный полиэдр Вейля в пространстве C^n. Тогда любая функция, голоморфная в D и непрерывная в $\overline{D}$, допускает равномерное приближение на $\overline{D}$ полиномами.*

В связи с первой задачей нельзя не упомянуть замечательного примера Евы Каллин ([7]). Она построила полиномиально выпуклое множество X в C^4 такое, что равномерное замыкание $P(X)$ полиномов на X является нелокальной алгеброй.

Что касается второй задачи, то здесь отметим следующие результаты.

ТЕОРЕМА (Вермер ([8])). *Действительно аналитическая незамкнутая дуга в C^n полиномиально выпукла.*

Дальнейшее усиление этого результата на случай гладкой дуги принадлежит Бишопу ([9]).

ТЕОРЕМА (Вермер ([10])). *В пространстве C^3 существует такая жорданова дуга* Γ, *что не всякая функция, непрерывная на* Γ, *может быть равномерно приближена на* Γ *многочленами от* z_1, z_2, z_3.

Хорошо известен следующий классический результат: *на плоскости комплексного переменного z всякая функция, непрерывная на жордановой дуге, равномерно на этой дуге приближается многочленами от z* [см. ([11])].

Теорема Вермера показывает, что в пространстве $C^n (n>1)$ это не так.

П р и м е р А. Г. В и т у ш к и н а. Построена полиномиально выпуклая область G с шиловской границей Γ такая, что $\dim \Gamma=0$ и проекции Γ на координатные плоскости имеют метрическую размерность 1 (в частности, площадь этих проекций равна нулю). Этот пример, с одной стороны, опровергает гипотезу Рудина о том, что для областей голоморфности в C^n топологическая размерность шиловской границы не меньше $n/2$; с другой стороны, через Γ можно провести дугу, на которой возможно приближение непрерывных функций рациональными, но заведомо нельзя — полиномами.

В нашем далеко не полном обзоре опущен целый ряд интересных работ [см. ([14]) — ([28])].

§ 1. Интегральное представление по продолжению остова

Пусть $z=(z_1, \ldots, z_n)$ — точка n-мерного комплексного пространства C^n. Область D в C^n называется аналитическим полиэдром, если существует N функций $\chi_\alpha(z), \alpha=1, \ldots, N$, голоморфных в некоторой окрестности $U(\bar{D})$ замыкания $\bar{D}$ и таких, что $D=\{z \in U(\bar{D}): |\chi_\alpha(z)|<1, \alpha=1, \ldots, N\}$.

Аналитический полиэдр называется полиэдром Вейля, если $N \geqslant n$ и пересечение любых k, $1 \leqslant k \leqslant n$, гиперповерхностей $|\chi_{\alpha_i}(z)|=1, i=1, \ldots, k$, имеет размерность не выше $2n-k$. В этом случае совокупность n-мерных «ребер»

$$\sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}=\{z: z \in \bar{D}, |\chi_{\alpha_i}(z)|=1, i=1, \ldots, k\},$$

ориентированных естественным образом, называется остовом полиэдра D и обозначается через $\Delta(D)$:

$$\Delta(D)=\bigcup_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} \sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

Полиэдр называется невырожденным, если якобиан $\dfrac{\partial(\chi_{\alpha_1} \ldots \chi_{\alpha_n})}{\partial(\zeta_1 \ldots \zeta_n)}$ на соответствующем ребре $\sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ не обращается в нуль.

Определение. Для заданного целочисленного вектора $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ построим множество

$$\tilde{\sigma}_\alpha=\{\zeta \in U(\bar{D}): |\chi_{\alpha_1}(\zeta)|=\ldots=|\chi_{\alpha_n}(\zeta)|=t;\ |\chi_k(\zeta)| \leqslant t,\ k=1, \ldots, N,\ 1 \leqslant t \leqslant 1 \leqslant 1+\eta^0\}$$

и выберем на нем ориентацию, согласованную с ориентацией σ_α. Число $\eta^0>0$ здесь выбрано таким, чтобы на $\tilde{\sigma}_\alpha$ не было вырождений, т. е. чтобы якобиан $\dfrac{\partial(\chi_{\alpha_1} \ldots \chi_{\alpha_n})}{\partial(\zeta_1 \ldots \zeta_n)}$ все еще не обращался в нуль на $\tilde{\sigma}_\alpha$. Множество

$$\tilde{\Delta}(D)=\bigcup_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} \tilde{\sigma}_\alpha$$

назовем продолжением остова полиэдра D.

Вывод интегрального представления основан на формуле Вейля, которая, как известно [см., например, ([12])], имеет вид:

$$f(z)=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} \int_{\sigma_\alpha} f(\zeta) D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n}) d\zeta, \quad z \in D, \tag{1.1}$$

и справедлива для любой функции f, голоморфной в D и непрерывной в $\overline{D}$.

Поясним приведенные в (1.1) обозначения: $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$; q_k означает вектор, координаты которого определяются формулами

$$q_{ki}(\zeta, z) = \frac{r_{ki}(\zeta, z)}{\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)}, \quad k = 1, \ldots, N, \quad i = 1, \ldots, n,$$

в которых голоморфные в области $U(\overline{D}) \times U(\overline{D})$ функции $r_{ki}(\zeta, z)$ определяются в свою очередь из разложения Хефера

$$\chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = \sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - z_i)\, r_{ki}(\zeta, z), \tag{1.2}$$

$\zeta, z \in U(\overline{D})$; через $D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})$ обозначен определитель порядка n, столбцами которого служат вектора $q_{\alpha_1}, \ldots, q_{\alpha_n}$.

Далее, для $\eta > 0$ обозначим

$$D_\eta = \{\zeta \in U(\overline{D}) : |\chi_k(\zeta)| \leqslant 1 + \eta,\ k = 1, \ldots, N\}.$$

Нам часто будут встречаться выражения типа

$$\int_{\tilde{\sigma}_\alpha} \bar{\partial} f\, D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta, \qquad \int_{\tilde{\sigma}_\alpha} \bar{\partial} f\, g\, D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta,$$

$z \in D$, где $f(\zeta)$ — непрерывная функция, финитная в D_{η^0}, $g(\zeta)$ — гладкая функция. Придадим этим выражениям смысл с помощью равенств

$$\int_{\tilde{\sigma}_\alpha} \bar{\partial} f\, D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta = \int_{\partial\tilde{\sigma}_\alpha} f\, D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta, \tag{1.3}$$

$$\int_{\tilde{\sigma}_\alpha} \bar{\partial} f\, g D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta = \int_{\partial\tilde{\sigma}_\alpha} f g D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta - \int_{\tilde{\sigma}_\alpha} f \bar{\partial} g D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta, \tag{1.4}$$

которые в случае гладкой функции f являются просто формулой Стокса. Здесь $\bar{\partial} g$ означает неаналитическую часть дифференциала dg, т. е.

$$\bar{\partial} g(\zeta) = \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}_1} d\bar{\zeta}_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}_n} d\bar{\zeta}_n.$$

ЛЕММА 1.1. *Пусть D — невырожденный полиэдр Вейля, f — непрерывная функция, голоморфная в D и финитная в D_{η^0}. Тогда*

$$f(z) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_n} \int_{\tilde{\sigma}_\alpha} \bar{\partial} f\, D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta -$$

$$- \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_{n+1}} \int_{\tilde{\sigma}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}}} \bar{\partial} f \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} D(q_{\alpha_1} \ldots [q_{\alpha_k}] \ldots q_{\alpha_{n+1}})\, d\zeta,$$

причем вектор q_{α_k}, стоящий в квадратных скобках, следует опустить. Здесь «стык»

$$\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}} = \widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \cap \widetilde{\sigma}_{\alpha_2\ldots\alpha_{n+1}}$$

имеет ориентацию, индуцируемую ориентацией $\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$.

Доказательство. Пусть

$$\sigma'_\alpha = \{\zeta \in \widetilde{\sigma}_\alpha : |\chi_{\alpha_1}(\zeta)| = \ldots = |\chi_{\alpha_n}(\zeta)| = 1 + \eta^0\}.$$

Так как $\partial\widetilde{\sigma}_\alpha = \sigma_\alpha + \sigma'_\alpha + \bigcup_s \sigma_{\alpha_1\ldots\alpha_n s}$ и на σ'_α функция f равна нулю, то (1.3) принимает вид:

$$\int_{\widetilde{\sigma}_\alpha} \bar{\partial} f D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta = \int_{\sigma_\alpha} fD(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta + \sum_s \int_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_n s}} fD(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta.$$

Суммируя это равенство по всем мультииндексам $\alpha_1 < \ldots < \alpha_n$ и учитывая (1.1), получим:

$$f(z) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} \int_{\widetilde{\sigma}_\alpha} \bar{\partial} f D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta -$$

$$- \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} \sum_s \int_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_n s}} fD(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta.$$

Перегруппировав члены в двойной сумме, получим утверждение леммы.

ЛЕММА 1.2. *Сумма ядер, соответствующих «стыку»* $\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}$, *равна нулю, т. е.*

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} D(q_{\alpha_1}\ldots [q_{\alpha_k}] \ldots q_{\alpha_{n+1}}) = 0, \quad z \in D.$$

Доказательство. Используя разложение (1.2), имеем:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} D(q_{\alpha_1}\ldots [q_{\alpha_k}] \ldots q_{\alpha_{n+1}}) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} [\chi_{\alpha_i}(\zeta) - \chi_{\alpha_i}(z)]} \sum_{k=1}^{n+1} [\chi_{\alpha_k}(\zeta) - \chi_{\alpha_k}(z)]\, (-1)^{k-1} D(r_{\alpha_1}\ldots [r_{\alpha_k}] \ldots r_{\alpha_{n+1}}) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} [\chi_{\alpha_i}(\zeta) - \chi_{\alpha_i}(z)]} \sum_{j=1}^{n} (\zeta_j - z_j) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} r_{\alpha_k j} D(r_{\alpha_1}\ldots [r_{\alpha_k}] \ldots r_{\alpha_{n+1}}) = 0.$$

Равенство нулю следует из того, что каждая из сумм

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}r_{\alpha_k j}D(r_{\alpha_1}\dots[r_{\alpha_k}]\dots r_{\alpha_{n+1}}),\quad j=1,\dots,n,$$

является разложением определителя с двумя равными строками.

Из лемм 1.1 и 1.2 следует

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть D — невырожденный полиэдр Вейля в пространстве C^n, f — непрерывная функция, голоморфная в D и финитная в D_{η^0}. Тогда при $z\in D$ справедлива формула*

$$f(z)=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n}\sum_{\alpha_1<\dots<\alpha_n}\int_{\tilde\sigma_\alpha}\bar\partial f D(q_{\alpha_1}\dots q_{\alpha_n})\,d\zeta. \tag{1.5}$$

§ 2. Оценка интеграла типа Вейля

ЛЕММА 2.1. *Для любого $(n+1)$-мерного целочисленного вектора $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})$ и k, $1\leqslant k\leqslant n-1$, справедливо тождество*

$$\sum_{i=k+1}^{n+1}(-1)^{i-1}D(r_{\alpha_1}\dots r_{\alpha_k}q_{\alpha_{k+1}}\dots[q_{\alpha_i}]\dots q_{\alpha_{n+1}})=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{j=k+1}^{n+1}[\chi_{\alpha_j}(\zeta)-\chi_{\alpha_j}(z)]}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\chi_{\alpha_i}(\zeta)-\chi_{\alpha_i}(z)]D(r_{\alpha_1}\dots[r_{\alpha_i}]\dots r_{\alpha_{n+1}}). \tag{2.1}$$

Доказательство. Используя равенства (1.2), имеем:

$$\sum_{i=k+1}^{n+1}(-1)^{i-1}D(r_{\alpha_1}\dots r_{\alpha_k}q_{\alpha_{k+1}}\dots[q_{\alpha_i}]\dots q_{\alpha_{n+1}})=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{j=k+1}^{n+1}[\chi_{\alpha_j}(\zeta)-\chi_{\alpha_j}(z)]}\sum_{i=k+1}^{n+1}(-1)^{i-1}\sum_{j=1}^{n}r_{\alpha_i j}(\zeta_j-z_j)D(r_{\alpha_1}\dots[r_{\alpha_i}]\dots r_{\alpha_{n+1}})=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{j=k+1}^{n+1}[\chi_{\alpha_j}(\zeta)-\chi_{\alpha_j}(z)]}\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j-z_j)\sum_{i=1}^{k}(-1)^i r_{\alpha_i j}D(r_{\alpha_1}\dots[r_{\alpha_i}]\dots r_{\alpha_{n+1}}). \tag{2.2}$$

Здесь было использовано тождество

$$\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}r_{\alpha_i j}D(r_{\alpha_1}\dots[r_{\alpha_i}]\dots r_{\alpha_{n+1}})\equiv 0,\quad j=1,\dots,n,$$

справедливое в силу того, что левая часть является разложением определителя с двумя равными строками. Тождество (2.1) получается из (2.2) с применением (1.2).

Следствие 1. *При условии* $\chi_{\alpha_i}(\zeta) - \chi_{\alpha_i}(z) = 0,\ i = 1, \ldots, k$, *справедливо равенство*

$$\sum_{i=k+1}^{n+1} (-1)^{i-1} D(r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_k} q_{\alpha_{k+1}} \ldots [q_{\alpha_i}] \ldots q_{\alpha_{n+1}}) = 0.$$

Взяв $k = n - 1$ и $\chi_{\alpha_{n+1}}(\zeta) = \zeta_n$, получим

Следствие 2. *При условии* $\chi_{\alpha_i}(\zeta) - \chi_{\alpha_i}(z) = 0,\ i = 1, \ldots, n-1$, *справедливо равенство*

$$\frac{D(r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_n})}{\chi_{\alpha_n}(\zeta) - \chi_{\alpha_n}(z)} = \frac{D'(r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_{n-1}})}{\zeta_n - z_n},$$

где

$$D'(r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_{n-1}}) = \begin{vmatrix} r_{\alpha_1 1} \ldots r_{\alpha_{n-1} 1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{\alpha_1 n-1} \ldots r_{\alpha_{n-1} n-1} \end{vmatrix}.$$

Определение. Полиэдр Вейля G, определяемый голоморфными в окрестности $U(\overline{G})$ функциями $\chi_\alpha(\zeta)$, $\alpha = 1, \ldots, N$, назовем регулярным, если он удовлетворяет следующим условиям:

а) существует окрестность $V(\overline{G}) \subset U(\overline{G})$ такая, что для каждого целочисленного вектора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, при всех $z \in U(G)$ аналитическое множество

$$A^z_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \{\zeta : \chi_{\alpha_i}(\zeta) - \chi_{\alpha_i}(z) = 0,\ i = 1, \ldots, k\} \cap V(\overline{G})$$

однолистно проектируется на некоторое подпространство

$$\{\zeta_{\nu(\alpha_i)} = 0,\ i = 1, \ldots, k\} \quad (\nu(\alpha_i) = 1, 2, \ldots, n);$$

б) для любых $\chi_{\alpha_1}, \ldots, \chi_{\alpha_n}$ отображение

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = \chi_{\alpha_1}(\zeta) \\ \ldots\ldots\ldots \\ w_n = \chi_{\alpha_n}(\zeta) \end{array}\right\}$$

взаимно однозначно в $V(\overline{G})$.

Условие б) несколько более сильное, чем просто невырожденность полиэдра G.

Всюду в этой главе g означает бесконечно дифференцируемую в C^n функцию.

Зафиксируем $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и будем считать, для определенности, что $\nu(\alpha_i) = i,\ i = 1, \ldots, k$. Пусть C^{n-k} означает пространство точек $\zeta' = (\zeta'_{k+1}, \ldots, \zeta_n)$

Из условия а) следует, что множество $A^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ задается системой некоторых функций $\varphi_i : \zeta_i = \varphi_i(\zeta'; z)$, $i = 1, \ldots, k$, голоморфных в проекции $A^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ на C^{n-k}.

Обозначим

$$g^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(\zeta', z) = g(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n),$$

$$\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_j}(\zeta'; z) = \chi_{\alpha_j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n), \quad j = k+1, \ldots, N,$$

$$r^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i}(\zeta', z) = r_{\alpha_i}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n; z), \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$R = R^{\alpha_1\ldots\alpha_k}(z) = \min\{1, \chi_{\alpha_1}(z), \ldots, \chi_{\alpha_k}(z)\}.$$

В пространстве C^{n-k} при фиксированном z построим полиэдр Вейля

$$G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = \{\zeta' : |\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_j}(\zeta'; z)| < R, j = k+1, \ldots, N\}.$$

Пусть $\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})$ — ребра этого полиэдра, составляющие остов:

$$\sigma_{\alpha_{n+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) = \{\zeta' \in \overline{G}^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k} : |\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_j}| = R, j = k+1, \ldots, n\}.$$

Построим множество

$$\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) = \{\zeta' : |\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_{k+1}}| = |\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_n}| = t; |\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_m}| \leqslant t,$$

$$m = 1, \ldots, N, \quad 0 \leqslant t \leqslant R\},$$

и сориентируем его в соответствии с ориентацией

$$\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}).$$

Пусть

$$I_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(z; \Phi) = \sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n} \int_{\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})} \Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} D(r_{\alpha_1}\ldots r_{\alpha_k} q_{\alpha_{k+1}}\ldots q_n)\, d\zeta',$$

где $\Phi = \Phi(\zeta')$ — функция, непрерывная на множестве интегрирования. При $k=0$ имеем просто функцию

$$I(z; \Phi) = \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} \int_{\sigma_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(G)} \Phi g D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta,$$

которую естественно назвать интегралом типа Вейля от функции Φg.

Пусть, далее, X означает множество точек в $U(\overline{G})$, в которых хотя бы две определяющие функции по модулю равны друг другу. Ясно, что X нигде не плотно в $U(\overline{G})$.

ЛЕММА 2.2. *Пусть G — регулярный полиэдр Вейля; Φ — функция, голоморфная в $G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ и непрерывная в $\overline{G}^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$. Тогда при $z \in U(\overline{G}) \setminus \{\partial G U X\}$*

имеет место формула

$$I_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(z;\Phi) = \sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n} \int\limits_{\tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})} \Phi\bar\partial g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} D\,(r^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_1}\ldots r^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_k}\times$$

$$\times q^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_{k+1}}\ldots q^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_n})\,d\zeta' +$$

$$+ 2\pi i \sum_{i=k+1}^{n} (-1)^{\nu(\alpha_i)-k-1} I_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_i}\left(z;\Phi \Big/ \frac{\partial\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i}}{\partial\zeta_{\nu(\alpha_i)}}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} = \{\zeta' : \chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i} - \chi_{\alpha_i}(z) = 0\} \cap \tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}),$$
$$\alpha_i = \alpha_{k+1}, \ \ldots\ , \alpha_n.$$

Множество $\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}$ окружим ε-трубкой

$$T_\varepsilon(\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}) = \{\zeta' \in \tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) : |\,\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i} - \chi_{\alpha_i}(z)\,| \leqslant \varepsilon\}$$

с боковой поверхностью

$$B_\varepsilon(\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}) = \{\zeta' \in \tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) : |\,\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i} - \chi_{\alpha_i}(z)\,| = \varepsilon\}.$$

На множестве

$$\tilde\sigma^\varepsilon_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) = \tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) \setminus [\bigcup_{i=k+1}^{n} T_\varepsilon(\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n})]$$

дифференциальная форма

$$\omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} = \Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} D\,(r^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_1}\ldots r^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_k}\, q^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_{k+1}}\ldots q^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_n})\,d\zeta'$$

не имеет особенностей. По формуле Стокса

$$\int\limits_{\tilde\sigma^\varepsilon_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})} d\omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} = \int\limits_{\partial\tilde\sigma^\varepsilon_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})} \omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}. \qquad (2.3)$$

В силу условия $z \bar\in \partial G$ при достаточно малых ε

$$\partial\tilde\sigma^\varepsilon_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) = \sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) + \bigcup_{i=k+1}^{n} B_\varepsilon(\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}) +$$
$$+ \bigcup_{s} [\tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n s} \setminus \bigcup_{i=k+1}^{n} T_\varepsilon(\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n})], \qquad (2.4)$$

где

$$\tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n s} = \tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} \cap \tilde\sigma_{\alpha_{k+2}\ldots\alpha_n s}.$$

Из (2.3) и (2.4) получим:

$$\int\limits_{\widetilde{\sigma}^{\varepsilon}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})} d\omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} = \int\limits_{\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})} \omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} \int\limits_{B_\varepsilon(\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n})} \omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} + \sum_s \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n s} \setminus \bigcup_{i=k+1}^{n} T_\varepsilon(\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n})} \omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}.$$

Просуммировав это равенство по всем мультииндексам $\alpha_{k+1} < \ldots < \alpha_n$ и устремив ε к нулю, найдем:

$$\sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n} \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})} d\omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} = \sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n} \int\limits_{\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})} \omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} +$$

$$+ \sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n} \sum_{i=k+1}^{n} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{B_\varepsilon(\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n})} \omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} + \sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n} \sum_s \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n s}} \omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}. \tag{2.5}$$

Покажем, что последняя двойная сумма равна нулю. В самом деле,

$$\sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n} \sum_s \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n s}} \omega^z_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} = \sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_{n+1}} \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}} \Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \times$$

$$\times \sum_{i=k+1}^{n+1} (-1)^{n+1-i} D(r^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_1} \ldots r^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_k} q^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_{k+1}} \ldots$$

$$\ldots [q^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i}] \ldots q^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_{n+1}})\, d\zeta' = 0. \tag{2.6}$$

Равенство нулю здесь справедливо в силу следствия 1 леммы 2.1.

Вычислим пределы в (2.5). Заметим прежде всего, что благодаря условию а) производная $\dfrac{\partial \chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i}}{\partial \zeta_{\nu(\alpha_i)}}$ отлична от нуля в $G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$. Обозначим

$$\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(\varepsilon;\varphi) = \{\zeta' \in \widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n} : \chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i} - \chi_{\alpha_i}(z) = \varepsilon e^{i\varphi}\}.$$

Благодаря условию $z \overline{\in} X$ функция

$$\prod_{\substack{j=k+1\\ j\neq i}}^{n} [\chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_j} - \chi_{\alpha_j}(z)]$$

не обращается в нуль в окрестности $\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}$. Поэтому при фиксированном φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, интеграл

$$\int\limits_{\lambda^{\alpha_i}_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(\varepsilon;\varphi)} \Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \frac{1}{\partial \chi^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\alpha_i} / \partial \zeta_{\nu(\alpha_i)}} \times$$

$$\times \frac{D\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \ldots r_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_k})\, d\zeta_{k+1} \ldots [d\zeta_{\nu(\alpha_i)}] \ldots d\zeta_n}{\prod\limits_{\substack{j=k+1\\ j\neq i}}^{n} [\chi_{\alpha_j}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} - \chi_{\alpha_j}(z)]}$$

стремится к интегралу по множеству $\lambda_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}^{\alpha_i}$ от того же подынтегрального выражения при $\varepsilon \to 0$. Учитывая это, получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{B_\varepsilon(\lambda_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}^{\alpha_i})} \omega_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}^{z} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{B_\varepsilon(\lambda_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}^{\alpha_i})} \Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \frac{(-1)^{\nu(\alpha_i)-k-1}}{\partial\chi_{\alpha_i}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}/\partial\zeta_{\nu(\alpha_i)}} \times$$

$$\times \frac{D\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \ldots r_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_k})\, d\chi_{\alpha_i}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} d\zeta_{k+1} \ldots [d\zeta_{\nu(\alpha_i)}] \ldots d\zeta_n}{\prod\limits_{j=k+1}^{n} [\chi_{\alpha_j}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} - \chi_{\alpha_j}(z)]} =$$

$$= (-1)^{\nu(\alpha_j)-k-1} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\substack{\chi_{\alpha_i}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} - \chi_{\alpha_i}(z) = \varepsilon e^{i\varphi}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \frac{d\chi_{\alpha_i}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}}{\chi_{\alpha_i}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} - \chi_{\alpha_i}(z)} \times$$

$$\times \int\limits_{\lambda_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}^{\alpha_i}(\varepsilon;\,\varphi)} \Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \frac{1}{\partial\chi_{\alpha_i}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}/\partial\zeta_{\nu(\alpha_i)}} \times$$

$$\times \frac{D\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \ldots r_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_k})\, d\zeta_{k+1} \ldots [d\zeta_{\nu(\alpha_i)}] \ldots d\zeta_n}{\prod\limits_{\substack{j=k+1\\ j\neq i}}^{n} [\chi_{\alpha_j}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} - \chi_{\alpha_j}(z)]} =$$

$$= (-1)^{\nu(\alpha_i)-k-1}\, 2\pi i \int\limits_{\lambda_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}^{\alpha_i}} \Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \frac{1}{\partial\chi_{\alpha_i}^{\alpha_1\ldots\alpha_k}/\partial\zeta_{\nu(\alpha_i)}} \times$$

$$\times \frac{D\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} \ldots r_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_k})\, d\zeta_{k+1} \ldots [d\zeta_{\nu(\alpha_i)}] \ldots d\zeta_n}{\prod\limits_{\substack{j=k+1\\ j\neq i}}^{n} [\chi_{\alpha_j}^{\alpha_1\ldots\alpha_k} - \chi_{\alpha_j}(z)]}. \tag{2.7}$$

Заметим теперь, что множество $\lambda_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}^{\alpha_i}$ не пусто лишь в том случае, если $|\chi_{\alpha_i}(z)| < R(z)$ и, поскольку находится на $A_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_i}^{z}$, по условию а) оно проектируется однолистно на подпространство $\{\zeta_1 = 0, \ldots \zeta_k = 0, \zeta_{\nu(\alpha_i)} = 0\}$. Нетрудно убедиться в том, что при этом проекцией $\bigcup\limits_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n} \lambda_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}^{\alpha_i}$

является остов полиэдра $G^{z}_{\alpha_1\ldots\alpha_k\alpha_i}$. Учитывая это замечание, из (2.5), (2.6) и (2.7) получим утверждение леммы.

ЛЕММА 2.3. *Пусть D — полиэдр Вейля, g — гладкая финитная функция, носитель m которой обладает окрестностью $U(m)$ такой, что в ней отображение*

$$\left.\begin{array}{c} w_1 = \chi_{\alpha_1}(\zeta) \\ \cdots\cdots \\ w_n = \chi_{\alpha_n}(\zeta) \end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

взаимно однозначно. Тогда функция

$$\psi(z) = \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}} \left| \bar{\partial} g \frac{d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{\prod\limits_{i=1}^{n} [\chi_{\alpha_i}(\zeta) - \chi_{\alpha_i}(z)]} \right|$$

ограничена при $z \in C^n$.

Доказательство. Пусть

$$\left.\begin{array}{c} \zeta_1 = \zeta_1(w) \\ \cdots\cdots \\ \zeta_n = \zeta_n(w) \end{array}\right\} \qquad (2.9)$$

отображение, обратное (2.8). В интеграле $\psi(z)$ сделаем замену переменных (2.9):

$$\psi(z) = \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}} \left| d\left\{ g(\zeta) \frac{d\zeta_1 \ldots d\zeta_n}{\prod\limits_{i=1}^{n} [\chi_{\alpha_i}(\zeta) - \chi_{\alpha_i}(z)]} \right\} \right| =$$

$$= \int\limits_{\widetilde{\sigma}^*} \left| d\left\{ g^*(w) \frac{\frac{\partial(\zeta_1 \ldots \zeta_n)}{\partial(w_1 \ldots w_n)} dw_1 \ldots dw_n}{\prod\limits_{i=1}^{n} [w_i - \chi_{\alpha_i}(z)]} \right\} \right|,$$

где $g^*(w) = g(\zeta_1(w), \ldots, \zeta_n(w))$, $\widetilde{\sigma}^*$ — продолжение остова единичного полицилиндра, т. е.

$$\widetilde{\sigma}^* = \{w \in C^n : |w_i| = t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Далее,

$$\psi(z) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\widetilde{\sigma}^*} \left| \frac{\partial g^*}{\partial w_j} \frac{\frac{\partial(\zeta_1 \ldots \zeta_n)}{\partial(w_1 \ldots w_n)} d\bar{w}_j dw_1 \ldots dw_n}{\prod\limits_{i=1}^{n} [w_i - \chi_{\alpha_i}(z)]} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\widetilde{\sigma}^*} \frac{|d\bar{w}_j dw_1 \ldots dw_n|}{\prod\limits_{i=1}^{n} |w_i - \chi_{\alpha_i}(z)|}, \qquad (2.10)$$

где

$$C = \max_{\substack{\zeta\in m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \left| \frac{\partial g^*}{\partial \overline{w}_j} \cdot \frac{\partial(\zeta_1\ldots\zeta_n)}{\partial(w_1\ldots w_n)} \right| < +\infty .$$

Покажем, к примеру, ограниченность первого слагаемого в (2.10):

$$\int_{\widetilde{\sigma}^*} \frac{|d\overline{w}_1 dw_1\ldots dw_n|}{\prod\limits_{i=1}^{n} |w_i-\chi_{\alpha_i}(z)|} = \int_{|w_1|\leqslant 1} \frac{|d\overline{w}_1 dw_1|}{|w_1-\chi_{\alpha_1}(z)|} \prod_{i=2}^{n} \int_{|w_i|=|w_1|} \frac{|d(w_1-\chi_{\alpha_i}(z))|}{|w_i-\chi_{\alpha_i}(z)|} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|w_1|\leqslant 1} \frac{|d\overline{w}_1 dw_1|}{|w_1-\chi_{\alpha_1}(z)|} \prod_{i=2}^{n} \int_{|w_i|=|w_1|} \frac{d|w_i-\chi_{\alpha_i}(z)|+|w_i-\chi_{\alpha_i}(z)|d\arg(w_i-\chi_{\alpha_i}(z)}{|w_i-\chi_{\alpha_i}(z)|} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|w_1|\leqslant 1} \frac{|d\overline{w}_1 dw_1|}{|w_1-\chi_{\alpha_1}(z)|} \prod_{i=2}^{n} \left(\ln\left| \frac{|w_1|+|\chi_{\alpha_i}(z)|}{|w_1|-|\chi_{\alpha_i}(z)|} \right| + 2\pi \right) \leqslant$$

$$\leqslant C' \int_{|w_1|\leqslant 1} \prod_{i=2}^{n} \ln\left|\,|w_1|-|\chi_{\alpha_i}(z)|\,\right| \frac{|d\overline{w}_1 dw_1|}{|w_1-\chi_{\alpha_1}(z)|} ,$$

где C' — константа. Ограниченность последнего интеграла уже следует из того, что особенности подынтегрального выражения интегрируемы. Лемма доказана.

ЛЁММА 2.4. *Пусть G — регулярный полиэдр в пространстве C^n, K — компакт в $U(\overline{G})$. Для любого $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $0\leqslant k\leqslant n-1$, и функции $\Phi(\zeta')$, голоморфной в $G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ и непрерывной в $\overline{G}^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$, справедлива оценка*

$$|I_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(z;\Phi)| \leqslant C_{\alpha_1\ldots\alpha_k} \|\Phi\|_{G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}}, \quad z\in K,$$

где $C_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ не зависит от z и Φ;

$$\|\Phi\|_{G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}} = \max_{\zeta'\in G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k}} |\Phi(\zeta')|.$$

Доказательство. Доказывать будет индукцией по k. При $k=n-1$ имеем:

$$I_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}(z;\Phi) = \sum_{\alpha_n} \int_{\sigma_{\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})} \Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}} \frac{D(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})\,d\zeta_n}{\chi_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}(\zeta_n)-\chi_{\alpha_n}(z)}. \tag{2.11}$$

Согласно следствию 2 из леммы 2.1,

$$\frac{D\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})}{\chi_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}(\zeta_n)-\chi_{\alpha_n}(z)}=\frac{D'\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})}{\zeta_n-z_n}. \tag{2.12}$$

Остов полиэдра $G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}$, т. е. $\bigcup\limits_{\alpha_n}\sigma_{\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})$ в одномерном случае является просто его границей. Учитывая это, из (2.11) и (2.12) получим:

$$I_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}(z;\Phi)=\int\limits_{\partial G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}\Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\,\frac{D'\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})\,d\zeta_n}{\zeta_n-z_n}.$$

По формуле Коши — Грина

$$I_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}(z;\Phi)=2\pi i\Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}D'\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})\,|_{\zeta_n=z_n}+$$

$$+\iint\limits_{G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}\Phi\,\frac{\partial g^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}{\partial\bar\zeta_n}\cdot\frac{D'\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})\,d\bar\zeta_n d\zeta_n}{\zeta_n-z_n},$$

если $z_n\in G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}$, и

$$I_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}(z;\Phi)=\iint\limits_{G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}\Phi\,\frac{\partial g^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}{\partial\bar\zeta_n}\cdot\frac{D'\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})}{\zeta_n-z_n}\,d\bar\zeta_n d\zeta_n,$$

если $z_n\,\overline{\in}\,\overline{G}^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}$. В обоих случаях имеем неравенство:

$$|I_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}(z;\Phi)|\leqslant 2\pi\max_{\substack{z\in K\\ \zeta_n\in G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}}\left|\Phi g^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}D'\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})\right|+$$

$$+\|\Phi\|_{G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}\iint\limits_{G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}\left|\frac{\partial g^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}}{\partial\bar\zeta_n}D'\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}\ldots r_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}})\right|\frac{|d\bar\zeta_n d\zeta_n|}{|\zeta_n-z_n|},$$

откуда и следует требуемая оценка. Пусть лемма доказана для всех $(k+1)$-мерных векторов. Оценим $I_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(z;\Phi)$. Для определенности положим $\nu(\alpha_i)=i$, $i=1,\ldots,k$. Используя лемму 2.2, получим неравенство

$$|I_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(z;\Phi)|\leqslant\sum_{\alpha_{k+1}<\ldots<\alpha_n}\left|\int\limits_{\tilde\sigma_{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n}(G^z_{\alpha_1\ldots\alpha_k})}\Phi\bar\partial g^{\alpha_1\ldots\alpha_k}\times\right.$$

$$\times D\,(r_{\alpha_1}^{\alpha_1\ldots\alpha_k},\ldots,r_{\alpha_k}^{\alpha_1\ldots\alpha_k},q_{\alpha_{k+1}}^{\alpha_1\ldots\alpha_k},\ldots,q_{\alpha_n}^{\alpha_1\ldots\alpha_k})\,d\zeta_{k+1}\ldots d\zeta_n+$$

$$+ 2\pi \sum_{i=k+1}^{n} \left| I_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_i} \left(z;\ \Phi \Big/ \frac{\partial \chi_{\alpha_i}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial \zeta_{\nu(\alpha_i)}} \right) \right|. \tag{2.13}$$

Согласно индуктивному предположению

$$\left| I'_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_i} \left(z;\ \Phi \Big/ \frac{\partial \chi_{\alpha_i}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial \zeta_{\nu(\alpha_i)}} \right) \right| \leqslant C_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_i} \left\| \Phi \Big/ \frac{\partial \chi_{\alpha_i}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{\partial \zeta_{\nu(\alpha_i)}} \right\|_{G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k}} \leqslant$$

$$\leqslant C'_{\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_i} \| \Phi \|_{G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}. \tag{2.14}$$

Далее,

$$\left| \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1} \dots \alpha_n}(G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k})} \Phi \bar{\partial} g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} D(r_{\alpha_1}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}, \dots r_{\alpha_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}, q_{\alpha_{k+1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, q_{\alpha_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_k})\, d\zeta_{k+1} \dots d\zeta_n \right| \leqslant \| \Phi \|_{G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k}} \times$$

$$\times \max_{\substack{\zeta' \in G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \\ z \in K}} | D(r_{\alpha_1}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \dots r_{\alpha_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}) | \times$$

$$\times \int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1} \dots \alpha_n}(G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k})} \left| \bar{\partial} g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \frac{d\zeta_{k+1} \dots d\zeta_n}{\prod\limits_{j=k+1}^{n} [\chi_{\alpha_j}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} - \chi_{\alpha_j}(z)]} \right|. \tag{2.15}$$

Из условия регулярности полиэдра G следует, что отображение

$$\left. \begin{aligned} w_{k+1} &= \chi_{\alpha_{k+1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} (\zeta'; z), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ w_n &= \chi_{\alpha_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} (\zeta'; z) \end{aligned} \right\}$$

взаимно однозначно на $\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1} \dots \alpha_n}(G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k})$. Поэтому к интегралу в правой части неравенства применима лемма 2.3:

$$\int\limits_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_{k+1} \dots \alpha_n}(G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k})} \left| \bar{\partial} g^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \frac{d\zeta_{k+1} \dots d\zeta_n}{\prod\limits_{j=k+1}^{n} [\chi_{\alpha_j}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} - \chi_{\alpha_j}(z)]} \right| \leqslant C', \quad z \in C^n. \tag{2.16}$$

Из (2.13), (2.14), (2.15) и (2.16) следует:

$$| I_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(z; \Phi) \leqslant C_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \| \Phi \|_{G^z_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}.$$

Лемма доказана.

В частности, при $k=0$ из леммы 2.4 вытекает

ЛЕММА 2.5 (основная). *Пусть* G — *регулярный полиэдр Вейля в пространстве* C^n; K — *компакт в* $U(\overline{G})$; Φ — *функция, голоморфная в* G *и непрерывная в* $\overline{G}$. *Тогда при* $z \in K$ *справедлива оценка*

$$|I(z; \Phi)| \leqslant C \| \Phi \|_G,$$

где C *не зависит от* z *и* Φ.

В приложении оценки интеграла типа Вейля к вопросам теории приближений мы будем сталкиваться со случаем, когда функция g финитна. В этом случае условия а) и б) на полиэдр G можно несколько ослабить, а именно, наложить эти условия только на те определяющие функции $\chi_k(\zeta)$, для которых пересечение множества $\{\zeta \in \overline{G} : \chi_k(\zeta) = 1\}$ с носителем m функции g не пусто. Оценка леммы 2.5 останется в силе и в этом случае, так как интеграл по ребру $\sigma_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$, в мультииндексе которого участвует k, равен нулю. Итак, справедлива

ЛЕММА 2.6. *Пусть* g — *финитная, бесконечно дифференцируемая функция в* C^n; G — *полиэдр Вейля, удовлетворяющий условиям* а) *и* б) *для тех функций* χ_{α_i}, *у которых пересечение множества* $\{\zeta \in \overline{G} : |\chi_{\alpha_i}(\zeta)| = 1\}$ *с носителем* m *функции* g *не пусто*; K — *компакт в* $U(\overline{G})$; Φ — *функция, голоморфная в* G *и непрерывная в* $\overline{G}$. *Тогда при* $z \in K$ *справедлива оценка*

$$|I(z; \Phi)| \leqslant C \| \Phi \|_G,$$

где C *не зависит от* z *и* Φ.

Примечание к леммам 2.5 и 2.6. Иногда под полиэдром Вейля подразумевают области более общего вида

$$G = \{\zeta \in C^n : \chi_k(\zeta) \in B_k, k = 1, \ldots, N\},$$

где B_k — некоторая область на плоскости значений определяющей функции $\chi_k(\zeta)$, граница которой является гладкой кривой. Нетрудно убедиться в том, что леммы 2.5 и 2.6 справедливы и для таких полиэдров.

Оценку интеграла типа Вейля можно обобщить на случай произвольного невырожденного полиэдра.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* D — *невырожденный полиэдр Вейля в* C^n; K — *компакт в* $U(\overline{D})$; g — *бесконечно дифференцируемая в* $U(\overline{D})$ *функция*; Φ — *функция, голоморфная в* D *и непрерывная в* $\overline{D}$. *Тогда при* $z \in K$ *справедлива оценка*

$$|I(z; \Phi)| \leqslant C \| \Phi \|_D,$$

где C *не зависит от* z *и* Φ.

Доказательство. Выберем систему вещественных функций $\{g_k^\delta(\zeta)\}_{k=1}^\infty$, называемую разбиением единицы, если удовлетворяются условия:

1°. При всех k и $\delta > 0$ функция g_k^δ неотрицательна, бесконечно дифференцируема, финитна и ее носитель m_k^δ имеет диаметр $< \delta$.

2°. Пересечение любого компакта в C^n с m_k^{δ} не пусто лишь для конечного числа значений k.

3°. $\sum\limits_k g_k^{\delta}(\zeta) \equiv 1$, $\zeta \in C^n$.

Представим, далее, функцию $J(z;\Phi)$ в виде

$$I(z;\Phi) = \sum_{k=1}^{N(\delta)} I_k(z;\Phi), \tag{2.17}$$

где

$$I_k(z;\Phi) = \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} \int_{\sigma_\alpha} \Phi g g_k^{\delta} D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta.$$

Суммирование в (2.17) конечно благодаря условию 2°.

На плоскости значений функции χ_i, $i=1,\ldots,N$, выделим подобласть B_k^i единичного круга, ограниченную гладкой кривой и удовлетворяющую условию

$$\chi_i(m_k^{\delta} \cap D) \subset B_k^i. \tag{2.18}$$

Далее, построим полиэдры Вейля

$$G_k = \{\zeta : \chi_i(\zeta) \in B_k^i,\ i = 1,\ \ldots,\ N\},$$

$k = 1,\ \ldots,\ N(\delta)$. Так как полиэдр D невырожденный, то, выбрав δ достаточно малым, можно так построить G_k, чтобы функция g_k^{δ} и соответствующий полиэдр G_k удовлетворяли условию леммы 2.6. Из (2.18) следует, что на множестве

$$[\sigma_\alpha(G_k) \setminus \sigma_\alpha] \cup [\sigma_\alpha \setminus \sigma_\alpha(G_k)]$$

функция g_k^{δ} равна нулю. Поэтому в выражении $I_k(z;\Phi)$ остов полиэдра D можно заменить остовом полиэдра G_k, т. е.

$$I_k(z;\Phi) = \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n} \int_{\sigma_\alpha(G_k)} \Phi g g_k D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta. \tag{2.19}$$

Согласно лемме 2.6 (см. примечание к ней)

$$|I_k(z;\Phi)| \leqslant C_k \|\Phi\|_D.$$

Из (2.17) и (2.19) следует утверждение теоремы.

§ 3. Приближение

Пусть система функций $\{g_k^{\delta}(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$ является разбиением единицы в пространстве C^n; D — невырожденный полиэдр Вейля, определяемый функциями $\chi_\alpha(\zeta)$, $\alpha = 1,\ \ldots,\ N$, голоморфными в окрестности $U(\overline{D})$; $\widetilde{\sigma}_\alpha$, D_{η^0} — те же, что и в § 1; f — непрерывная функция, голоморфная в D и финитная в D_{η^0}.

Следующая лемма имеет существенное значение при доказательстве теоремы о приближении.

ЛЕММА 3.1. *При достаточно малом* $\delta > 0$ *для каждого* k *существуют направление* $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})$ *и число* $\varepsilon_k > 0$ *такие, что при всех* ε *из интервала* $(0, \varepsilon_k)$ *функция* $f_{k,\varepsilon}(\zeta) = f(\zeta + \varepsilon a^{(k)})$ *голоморфна в некоторой окрестности* V_ε *множества* $\Delta(D) \cap m_k^\delta$.

Геометрический смысл этой простой леммы заключается в том, что при малых сдвигах в определенном направлении кусочек остова $\Delta(D) \cap m_k^\delta$ попадает внутрь полиэдра D. Всюду в дальнейшем число δ выбрано таким, чтобы лемма 3.1 была бы в силе.

ЛЕММА 3.2. *При любом* ε *из интервала* $(0, \varepsilon_k)$ *функция*

$$\int\limits_{\tilde{\sigma}_\alpha} \bar\partial f_{k,\varepsilon} g_k^\delta D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta$$

голоморфна в некоторой окрестности замкнутого полиэдра $\overline{D}$.

Доказательство. Для $\eta > 0$ положим

$$\tilde{\sigma}_\alpha^\eta = \{\zeta \in \tilde{\sigma}_\alpha : |\chi_{\alpha_1}(\zeta)| = \ldots = |\chi_{\alpha_n}(\zeta)| = t,\ 1 \leqslant t \leqslant 1 + \eta\}$$

и возьмем $\eta = \eta(\varepsilon)$ таким, чтобы множество $\tilde{\sigma}_\alpha^\eta \cap m_k^\delta$ содержалось в окрестности V_ε предыдущей леммы. Далее, имеем:

$$\int\limits_{\tilde{\sigma}_\alpha} \bar\partial f_{k,\varepsilon} g_k^\delta D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta = \int\limits_{\tilde{\sigma}_\alpha^\eta} \bar\partial f_{k,\varepsilon} g_k^\delta D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{\sigma}_\alpha \setminus \tilde{\sigma}_\alpha^\eta} \bar\partial f_{k,\varepsilon} g_k^\delta D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta.$$

Первое слагаемое в правой части тождественно равно нулю, так как $\bar\partial f_{k,\varepsilon}(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \tilde{\sigma}_\alpha^\eta \cap m_k^\delta$. Второе же слагаемое голоморфно в некоторой окрестности $\overline{D}$, так как интегрирование в нем фактически производится по множеству $m_k^\delta \cap [\tilde{\sigma}_\alpha \setminus \tilde{\sigma}_\alpha^\eta]$, которое находится на положительном расстоянии от области D. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть f голоморфна в D и непрерывна в $\overline{D}$. Продолжим f непрерывным образом до функции, финитной в D_{η_0}. Устроим разбиение единицы и, следуя А. Г. Витушкину ([13]), исходя из формулы (1.5) представим f в виде

$$f(z) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{N(\delta)} f_k^\delta(z), \tag{3.1}$$

где

$$f_k^\delta(z) = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_n} \int\limits_{\tilde{\sigma}_\alpha} \bar\partial f g_k^\delta D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta.$$

Каждое слагаемое f_k^δ будем приближать функцией

$$F_k^\delta(z;\varepsilon)=\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n}\int_{\widetilde{\sigma}_\alpha}\bar\partial f_{k,\varepsilon}g_k^\delta D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\,d\zeta,$$

которая по лемме 3.2 голоморфна в окрестности $\bar D$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что разность между $f_k^\delta(z)$ и $F_k^\delta(z;\varepsilon)$ за счет выбора ε может быть сделана равномерно на $\bar D$ сколь угодно малой. Имеем:

$$F_k^\delta(z;\varepsilon)-f_k^\delta(z)=\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n}\int_{\widetilde{\sigma}_\alpha}\bar\partial(f_{k,\varepsilon}-f)\,g_k^\delta D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\,d\zeta.$$

Согласно (1.4), принимая во внимание, что

$$\partial\widetilde{\sigma}_\alpha=\sigma_\alpha+\bigcup_s\sigma_{\alpha_1\ldots\alpha_n s}+\sigma_\alpha'$$

и на σ_α' функция f равна нулю, получим:

$$F_k^\delta(z;\varepsilon)-f_k^\delta(z)=\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n}\int_{\sigma_\alpha}(f_{k,\varepsilon}-f)\,g_k^\delta D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\,d\zeta+$$
$$+\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n}\sum_s\int_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_n s}}(f_{k,\varepsilon}-f)\,g_k^\delta D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\,d\zeta-$$
$$-\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n}\int_{\widetilde{\sigma}_\alpha}(f_{k,\varepsilon}-f)\,\bar\partial g_k^\delta D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\,d\zeta. \tag{3.2}$$

Перегруппировав члены в двойной сумме, найдем:

$$\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_n}\sum_s\int_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_n s}}(f_{k,\varepsilon}-f)\,g_k^\delta D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\,d\zeta=$$
$$=\sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_{n+1}}\int_{\widetilde{\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_{n+1}}}(f_{k,\varepsilon}-f)\,g_k^\delta\left[\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}D(q_{\alpha_1}\ldots[q_{\alpha_k}]\ldots q_{\alpha_{n+1}})\right]d\zeta=0. \tag{3.3}$$

Равенство нулю здесь следует из леммы 1.2.

Далее, имеем:

$$\left|\int_{\widetilde{\sigma}_\alpha}(f_{k,\varepsilon}-f)\,\bar\partial g_k^\delta D(q_{\alpha_1}\ldots q_{\alpha_n})\,d\zeta\right|\leqslant\|f_{k,\varepsilon}-f\|_{\bar D}\cdot M\int_{\widetilde{\sigma}_\alpha}\left|\bar\partial g_k^\delta\frac{d\zeta}{\prod_{i=1}^n[\chi_{\alpha_i}(\zeta)-\chi_{\alpha_i}(z)]}\right|,$$

где $M=\max\limits_{\zeta,z\in D}|D(r_{\alpha_1}\ldots r_{\alpha_n})|$. В силу невырожденности полиэдра D число

δ можно взять таким, чтобы лемма 2.3 была в силе. Итак, при $z \in \overline{D}$

$$\left| \int_{\widetilde{\sigma}_\alpha} (f_{k,\varepsilon} - f)\, \bar{\partial} g_k^\delta D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta \right| \leqslant C_1 \| f_{k,\varepsilon} - f \|_{\overline{D}}. \tag{3.4}$$

Чтобы оценить интеграл типа Вейля от функции $(f_{k,\varepsilon} - f)\, g_k^\delta$ в правой части (3.2), строим, как в теореме 2.1, полиэдры G_k, причем диаметр области G_k возьмем настолько малым, чтобы функции $f_{k,\varepsilon}(\zeta)$, $k = 1, \ldots, N(\delta)$, были бы голоморфны в G_k. Затем полиэдр D заменяем для каждого k полиэдром G_k и применяем лемму 2.5.

Итак, при $z \in \overline{D}$

$$\left| \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_\alpha} \int_{\widetilde{\sigma}_\alpha} (f_{k,\varepsilon} - f)\, g_k^\delta D(q_{\alpha_1} \ldots q_{\alpha_n})\, d\zeta \right| \leqslant C' \| f_{k,\varepsilon} - f \|_{\overline{D}}. \tag{3.5}$$

Из (3.2), (3.3), (3.4) и (3.5) следует неравенство

$$| F_k^\delta(z; \varepsilon) - f_k^\delta(z) | \leqslant C \| f_{k,\varepsilon} - f \|_{\overline{D}}, \quad z \in \overline{D}. \tag{3.6}$$

Пусть задано число $\varepsilon_1 > 0$. Поскольку функция f непрерывна, ε можно выбрать таким, чтобы

$$C \| f_{k,\varepsilon} - f \|_{\overline{D}} < \varepsilon_1, \quad z \in \overline{D}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7), следует:

$$| F_k^\delta(z; \varepsilon) - f_k^\delta(z) | < \varepsilon_1, \quad z \in \overline{D}.$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Г. Витушкину, под руководством которого была выполнена эта работа, и Г. М. Хенкину за обсуждение статьи.

Матем. институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
18.VI.1970

ЛИТЕРАТУРА

[1] Helson H., Quigly F., Existence of maximal ideals in algebras of continous functions, Proc. Amer. Math. Soc., 8, № 1 (1957), 115—119.

[2] Чирка Е. М., Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в C^n, Докл. АН СССР, т. 167, № 1 (1966), 38—40.

[3] Wells R. O., Holomorphic approximation on real-analytic submanifolds of a complex manifold, Proc. Amer. Math. Soc., 17, № 6 (1966), 1272—1275.

[4] Чирка Е. М., Приближение голоморфными функциями на гладких многообразиях в C^n, Матем. сб., т. 78, вып. 1 (1969), 101—123.

[5] Хенкин Г. М., Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях и некоторые приложения, Матем. сб., т. 78, № 4 (1969), 611—632.

[6] Bremermann H., Die Charakterisierung Rungesher Gebiete durch plurisubharmonishe Functionen, Math. Ann., 136 (1958), 173—186.

[7] Kallin E., A non-local function algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 49, № 6 (1963), 821—824.

[8] Wermer J., The hull of a curve in C^n, Ann. Math., 68 (1958), 550—561.

[9] Bishop E., Analyticity in certain Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 102, № 3 (1962), 507—544.

[10] Вермер Дж., Сб. «Некоторые вопросы теории приближений», М., ИЛ, 1963.

[11] Уолш Д., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной плоскости, М., ИЛ, 1961.

[12] Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., Физматгиз, 1964.

[13] Витушкин А. Г., Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, Успехи матем. наук, XXII, вып. 6 (138) (1967), 141—199.

[14] Bishop E., Some global problems in the theory of functions of several complex variables, Amer. J. Math., 83, № 3 (1961), 479—498.

[15] Bishop E., Differentiable manifolds in complex Euclidean space, Duke Math. J., 32, № 1 (1965), 1—21.

[16] Bishop E., A generalization of the Stone — Weierstrass theorem, Pacific J. Math., 11, № 3 (1961), 777—783.

[17] Бишоп Э., Минимальная граница функциональных алгебр, Сб. «Некоторые вопросы теории приближений», М., ИЛ, 1963.

[18] Маркушевич Л. А., Об аппроксимации непрерывных функций многочленами на жордановых дугах в пространстве многих комплексных переменных, Сиб. матем. ж., т. 6, № 3 (1965), 528—545.

[19] Маркушевич Л. А., Приближение многочленами непрерывных функций на жордановых дугах в пространстве K^n — n-комплексных переменных, Сиб. матем. ж., т. 2, № 2 (1961), 237—260.

[20] Nirenberg R., Wells R. O., Holomorphic approximation on real submanifolds of a complex manifold, Bull. Amer. Math. Soc., 73, № 3 (1967), 378—381.

[21] Kallin E., Polynomial convexity: the three spheres problem, «Proc. conf. Complex Analysis, Minneapolis 1964». Berlin — Heidelberg — New York, 1965, 301—308.

[22] Andreotti A., Stoll W., Extension of holomorphic maps, Ann. Math., 72, № 2 (1960), 312—349.

[23] Stolzenberg G., Polynomially and rationally convex sets, Acta Math., 109, № 3—4 (1963), 259—289.

[24] Stolzenberg G., Polynomially convex sets, Bull. Amer. Math. Soc., 68, № 4 (1962), 382—387.

[25] Stolzenberg G., A hull with no analytic structure, J. Math. and Mech., 12, № 1 (1969), 103—111.

[26] Wermer J., Uniform approximation and maximal ideal spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 68, № 4 (1962), 298—305.

[27] Hoffman K., Minimal boundaries for analytic polyhedra, Rend. Circolo mat. Palermo, 9, № 2 (1960), 147—160.

[28] Рудин У., Подалгебры пространств непрерывных функций, Сб. «Некоторые вопрсы теории приближений», М., ИЛ, 1963.