ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա V, № 6, 1970 Математика

А. И. ПЕТРОСЯН

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГОЛОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ПОЛИЭДРАХ ВЕЙЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{C}^2$

Введение

Теорема Вейля утверждает, что на полиномиальных полиэдрах Вейля в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ всякая функция, голоморфная в окрестности полиэдра, равномерно приближается полиномами. Возможны более сильные утверждения, относящиеся к функциям, непрерывным на компакте и голоморфным в его внутренних точках. Отметим некоторые из результатов этого рода. Для аналитических дуг возможность приближения непрерывных функций полиномами доказана Вермером [1], Е. М. Чирка обобщил этот результат на случай простых жордановых дуг с нигде не плотной проекцией [2]. Для строго псевдовыпуклых областей теорема о приближении сделана Г. М. Хенкиным [3]. Настоящая работа посвящена изучению возможности равномерной аппроксимации голоморфных функций на полиэдре Вейля. Напомним определение полиэдра. Пусть $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ — точка n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$. Область D в $\mathbb{C}^n$ называется аналитическим полиэдром, если существуют N функций $\chi_n(z)$, $n = 1, \dots, N$, голоморфных в некоторой окрестности $U(\overline{D})$ замыкания D и таких, что

$$D = \{z\colon\ |\chi_\alpha(z)| < 1,\ \ \alpha = 1, \dots, N\}.$$

Аналитический полиэдр называется полиэдром Вейля, если $N \geqslant n$ и пересечение любых k, $1 \leqslant k \leqslant n$, гиперповерхностей $|\chi_{\alpha_i}(z)| = 1$, $i = 1, \dots, k$, имеет размерность не выше $2n - k$. В этом случае совокупность n-мерных «ребер»

$$\sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \left\{z\colon\ z \in \overline{D},\ \ |\chi_{\alpha_i}(z)| = 1,\ \ i = 1, \dots, n\right\},$$

ориентированных естественным образом, называется остовом полиэдра D и обозначается через $\Delta(D)$:

$$\Delta(D) = \bigcup_{\alpha_1 < \dots < \alpha_n} \sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Полиэдр называется невырожденным, если якобиан $\dfrac{\partial(\chi_{\alpha_1},\dots,\chi_{\alpha_n})}{\partial(\zeta_1,\dots,\zeta_n)}$ на соответствующем ребре $\sigma_{\alpha_1\dots\alpha_n}$ не обращается в нуль. Невырожденные полиэдры уже рассматривались в разных работах. Например, Бремерманом [4] установлено, что для таких полиэдров Вейля минимальная граница и граница Шилова алгебры функций, аналитических внутри полиэдра и непрерывных в его замыкании, совпадают с остовом. Основным результатом настоящей работы является теорема 3.1, утверждающая, что всякая функция, голоморфная в невырожденном полиэдре Вейля и непрерывная на его замыкании, равномерно аппроксимируется функциями, голоморфными в окрестности полиэдра. Заметим при этом, что класс невырожденных полиэдров является достаточно широким в том смысле, что любую область голоморфности можно аппроксимировать изнутри невырожденными полиэдрами Вейля.

В доказательстве вышеупомянутого результата использовано интегральное представление голоморфных функций, принадлежащее А. Г. Витушкину, который любезно согласился на его публикацию в этой статье. Это интегральное представление выражает значения любой непрерывной финитной функции, голоморфной внутри полиэдра Вейля, через ее значения на так называемом продолжении остова, причем ядро его аналитично, а для невырожденных полиэдров оно еще и интегрируемо в достаточно малой окрестности остова.

Для простоты и наглядности в настоящей работе рассматривается случай $\mathbb{C}^2$, а общий случай будет опубликован в другой статье.

§ 1. Интегральное представление по продолжению остова

Вывод этого интегрального представления основан на формуле Вейля, которая, как известно, (см., например, [5]) имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k<l}\iint\limits_{\sigma_{kl}} f(\zeta)D(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 \tag{1.1}$$

и справедлива для любой функции, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$. Поясним приведенные здесь обозначения. q_k означает вектор, координаты которого определяются по формулам

$$q_{ki}=\frac{r_{ki}(\zeta,z)}{\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)},\qquad k=1,\dots,N;\quad i=1,\dots,n,$$

в которых функции $r_{ki}(\zeta,z)$, аналитические в области $U(\overline{D})\times U(\overline{D})$, определяются в свою очередь из разложения Хефера

$$\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)\,r_{ki}(\zeta,z), \tag{1.2}$$

и, наконец
$$D(q_k, q_l) = \begin{vmatrix} q_{k1} & q_{l1} \\ q_{k2} & q_{l2} \end{vmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Для заданной пары индексов k, l построим трехмерную поверхность
$$\widetilde{\sigma}_{kl} = \{z\colon\ |\chi_k(z)| = |\chi_l(z)| = t;\ |\chi_m(z)| \leqslant t,\ 1 \leqslant t < \infty,\ m = 1, \dots, N\},$$
и выберем на ней ориентацию, согласованную с ориентацией σ_{kl}. Множество $\widetilde{\Delta}(D) = \bigcup\limits_{k<l} \widetilde{\sigma}_{kl}$ будем называть *продолжением остова полиэдра* D.

З а м е ч а н и е 1. Нам часто будут встречаться выражения типа
$$\iiint\limits_{\sigma_{kl}} \bar{\partial} f \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2; \qquad \iiint\limits_{\sigma_{kl}} \bar{\partial} f \cdot g \cdot D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2$$
$z \in D$; где f — функция, непрерывная и финитная в $U\left(\overline{D}\right)$; g — гладкая функция. Придадим этим выражениям смысл с помощью равенств
$$\iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\partial\widetilde{\sigma}_{kl}} f D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \tag{1.3}$$
$$\iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\partial\widetilde{\sigma}_{kl}} f g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 - \iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} f \bar{\partial} g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2, \tag{1.4}$$
которые для гладкой функции f являются просто формулой Стокса. Здесь $\bar{\partial} f$ означает неаналитическую часть дифференциала df, т. е.
$$\bar{\partial} f(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_1} d\bar{\zeta}_1 + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_2} d\bar{\zeta}_2.$$

Л е м м а 1.1. *Пусть D — полиэдр Вейля, f — непрерывная и финитная в $U\left(\overline{D}\right)$ функция, голоморфная внутри D. Тогда*
$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l} \iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l<m} \iint\limits_{\widetilde{\sigma}_{klm}} f\left[D(q_k, q_l) + D(q_l, q_m) + D(q_m, q_k)\right] d\zeta_1 d\zeta_2,$$
$z \in D$. Здесь $\widetilde{\sigma}_{klm} = \widetilde{\sigma}_{kl} \bigcap \widetilde{\sigma}_{lm}$ имеет ориентацию, индуцированную ориентацией $\widetilde{\sigma}_{kl}$.

Доказательство. Так как $\partial\widetilde{\sigma}_{kl} = \sigma_{kl} + \bigcup\limits_{\substack{m=1\\ m\neq k,l}}^{N} \widetilde{\sigma}_{klm}$, то (1.3) принимает вид

$$\iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\sigma_{kl}} f D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 + \\ + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k,l}}^{N} \iint\limits_{\widetilde{\sigma}_{klm}} f D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Суммируя это равенство по всем $k<l$ и перегруппировывая члены в получаемой при этом двойной сумме, получим утверждение леммы. □

Лемма 1.2. *Сумма ядер, соответствующих «стыку» $\widetilde{\sigma}_{klm}$, равна нулю, т. е.*

$$D(q_k, q_l + D(q_l, q_m + D(q_m, q_k \equiv 0.$$

Доказательство. В силу разложения (1.2) имеем

$$\begin{aligned}&\big[\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)\big]\big[\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)\big]\big[\chi_m(\zeta) - \chi_m(z)\big]\big[D(q_k, q_l) + \\ &+ D(q_l, q_m) + D(q_m, q_k)\big] = \big[\chi_m(\zeta) - \chi_m(z)\big] D(q_k, q_l) + \\ &+ \big[\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)\big] D(r_l, r_m) + \big[\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)\big] D(r_m, r_k) = \\ &= [r_{m1} D(r_k, r_l) + r_{k1} D(r_l, r_m) + r_{l1} D(r_m, r_k)]\,(\zeta_1 - z_1) + \\ &+ [r_{m2} D(r_k, r_l) + r_{k2} D(r_l, r_m) + r_{l2} D(r_m, r_k)]\,(\zeta_2 - z_2) \equiv 0,\end{aligned}$$

так как квадратные скобки являются разложениями определителей с двумя равными строками. □

Из лемм (1.1) и (1.2) следует

Теорема 1.1. *Пусть D — полиэдр Вейля, f — непрерывная и финитная в $U\left(\overline{D}\right)$ функция, голоморфная внутри D. Тогда справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l} \iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2, \qquad z \in D. \tag{1.5}$$

§ 2. Оценка интеграла типа Вейля

На протяжении всего этого параграфа, кроме леммы 2.3, D означает невырожденный полиэдр Вейля в пространстве $\mathbb{C}^2$, удовлетворяющий условию

а) существует окрестность $V(\overline{D})$ замыкания полиэдра D такая, что для каждой определяющей функции $\chi_i(\zeta)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, при всех $z \in U(\overline{D})$ множество $\{\zeta\colon\ \chi_i(\zeta) - \chi_i(z) = 0\} \bigcap V(\overline{D})$ проецируется на одну из координатных плоскостей $\zeta_{\nu_i} = 0$ $(\nu_i = 1, 2)$ однолистно.

Построим множество

$$\widetilde{\sigma}_{kl} = \bigl\{\zeta \in \overline{D}\colon\ |\chi_k(\zeta)| = |\chi_i(\zeta)| = t,\ |\chi_m(\zeta)| \leqslant t,\ 1-\eta^\circ \leqslant t \leqslant 1;\ m = 1,\ldots,N\bigr\}$$

и сориентируем его в соответствии с ориентацией σ_{kl}. Число η° здесь взято достаточно малым так, чтобы на $\widetilde{\sigma}_{kl}$ якобиан $\dfrac{\partial(\chi_k,\chi_l)}{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}$ не обращался в нуль. Объединение $\widetilde{\Delta}(D) = \bigcup\limits_{k<l} \widetilde{\sigma}_{kl}$ является продолжением остова полиэдра внутрь. Пусть

$$\lambda_{kl}^k = \lambda_{kl}^k(z) = \bigl\{\zeta\colon\ \chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = 0\bigr\} \bigcap \widetilde{\sigma}_{kl}.$$

Л е м м а 2.1. *Пусть Φ — функция, голоморфная в D и непрерывная в $\overline{D}$; g — гладкая финитная функция, носитель которой не пересекается с множеством $\bigl\{\zeta \in D\colon\ |\chi_k(\zeta)| \leqslant 1-\eta^\circ,\ k = 1,\ldots,N\bigr\}$. Тогда при*

$$z \in U\left(\overline{D}\right) \setminus \bigl\{\partial D \bigcup \widetilde{\Delta}(D)\bigr\}$$

имеет место формула

$$\sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi g D(q_k,q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} \Phi \bar{\partial} g D(q_k,q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 + \\ + 2\pi i \sum_{k=1}^{N} (-1)^{\nu_k} \sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{N} \frac{\Phi g}{\frac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}}} \frac{D(r_k,r_l)}{\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)}\, d\zeta_{3-\nu_k}. \qquad (2.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Окружим особые кривые λ_{kl}^k ε-трубкой

$$T_\varepsilon\bigl(\lambda_{kl}^k\bigr) = \bigl\{\zeta \in \widetilde{\sigma}_{kl}\colon\ |\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)| \leqslant \varepsilon\bigr\}$$

с боковой поверхностью

$$B_\varepsilon\bigl(\lambda_{kl}^k\bigr) = \bigl\{\zeta \in \widetilde{\sigma}_{kl}\colon\ |\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)| = \varepsilon\bigr\}.$$

К дифференциальной форме $d\bigl[\Phi g D(q_k,q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2\bigr]$ на множестве $\widetilde{\sigma}_{kl}^\varepsilon = \sigma_{kl} \setminus \bigl[T_\varepsilon\bigl(\lambda_{kl}^k\bigr) \bigcup T_\varepsilon\bigl(\lambda_{kl}^l\bigr)\bigr]$ применим формулу Стокса. Это можно сделать, так как ядро $D(q_k,q_l)$ на $\widetilde{\sigma}_{kl}^\varepsilon$ не имеет особенностей. Имеем

$$\iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}^\varepsilon} d\bigl[\Phi g D(q_k,q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2\bigr] = \iint\limits_{\partial\widetilde{\sigma}_{kl}^\varepsilon} \Phi g D(q_k,q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2. \qquad (2.2)$$

Заметим, что в силу условия $z \notin \partial D$ при достаточно малых ε

$$\partial\widetilde{\sigma}_{kl}^\varepsilon = \sigma_{kl} + \sigma_{kl}' + B_\varepsilon\bigl(\lambda_{kl}^k\bigr) + B_\varepsilon\bigl(\lambda_{kl}^l\bigr) + \\ + \bigcup_{\substack{m=1\\ m\neq k,l}}^{N} \bigl\{\widetilde{\sigma}_{klm} \setminus \bigl[T_\varepsilon\bigl(\lambda_{kl}^k\bigr) \bigcup T_\varepsilon\bigl(\lambda_{kl}^l\bigr)\bigr]\bigr\},$$

Учитывая еще и аналитичность функций

$$\iiint\limits_{\widetilde{\sigma}^{\varepsilon}_{kl}} \Phi\bar{\partial}gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$\iint\limits_{\sigma'_{kl}} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 + \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$\iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^l_{kl})} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k,l}} \iint\limits_{\{\sigma_{kl}\setminus[T_\varepsilon(\lambda^k_{kl})\bigcup T_\varepsilon(\lambda^l_{kl})]\}} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2$$

Интеграл по множеству σ'_{kl} равен нулю, благодаря условию на носитель функции g. Просуммировав это равенство по всем $k<l$ и устремив ε к нулю, получим

$$\sum_{k<l} \iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} \Phi\bar{\partial}gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 = \sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k<l}\Bigg\{ \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 + \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^l_{kl})} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2\Bigg\} +$$

$$+ \sum_{k<l}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k,l}} \iint\limits_{\widetilde{\sigma}_{klm}} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2. \tag{2.3}$$

Перегруппировав члены в двойной сумме, по лемме (1.2) заключаем, что она равна нулю. Вычислим предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi gD(q_l,q_k)\,d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Заметим, что в силу условия а) производная $\dfrac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}$ отлична от нуля в $V(\overline{D})$. Имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2 = (-1)^{3-\nu_k}\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{B_\varepsilon(\lambda^k_{kl})} \frac{\Phi gD(q_k,q_l)}{\frac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}}\,d\chi_k d\zeta_{3-\nu_k} =$$

$$= (-1)^{3-\nu_k}\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)|=\varepsilon} \frac{d\chi_k(\zeta)}{\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)} \int\limits_{\substack{|\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)|=\varepsilon\\ |\chi_l(\zeta)|=|\chi_k(\zeta)|}} \frac{\Phi gD(q_k,q_l)d\zeta_{3-\nu_k}}{\frac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}(\chi_k(\zeta)-\chi_k(z))} =$$

$$= 2\pi i(-1)^{3-\nu_k} \int\limits_{\lambda^k_{lk}} \frac{\Phi gD(q_k,q_l)d\zeta_{3-\nu_k}}{\frac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}(\chi_k(\zeta)-\chi_k(z))}.$$

Итак, равенство (2.3) принимает вид

$$\sum_{k<l}\iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}}\Phi\bar{\partial}gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2=\sum_{k<l}\iint\limits_{\sigma_{kl}}\Phi gD(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2+$$

$$+\,2\pi i\sum_{k<l}\left\{(-1)^{3-\nu_k}\int\limits_{\lambda^k_{lk}}\frac{\Phi gD(q_k,q_l)d\zeta_{3-\nu_k}}{\frac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}\left(\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)\right)}+(-1)^{3-\nu_l}\int\limits_{\lambda^l_{lk}}\frac{\Phi gD(q_k,q_l)d\zeta_{3-\nu_l}}{\frac{\partial\chi_l}{\partial\zeta_{\nu_l}}\left(\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)\right)}\right\},$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Л е м м а 2.2. *При условии $\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)$ справедливо равенство*

$$\frac{D(r_k,r_l)}{\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)}=(-1)^{3-\nu_k}\frac{r_{k\nu_k}(\zeta,z)}{\zeta_{3-\nu_k}-z_{3-\nu_k}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $\nu_k=1$. Имеем

$$\frac{D(r_k,r_l)}{\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)}-\frac{r_{k1}}{\zeta_2-z_2}=\frac{D(r_k,r_l)(\zeta_2-z_2)-r_{k1}\left[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)\right]}{\left[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)\right](\zeta_2-z_2)}=$$

$$=-\frac{r_{k2}r_{l1}(\zeta_2-z_2)+r_{k1}r_{l1}(\zeta_1-z_1)}{\left[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)\right](\zeta_2-z_2)}=-\frac{r_{l1}\left[\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)\right]}{\left[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)\right](\zeta_2-z_2)}=0. \qquad \square$$

Следующая лемма, по существу, утверждает, что ядро $D(q_k,q_l)$ интегрируемо на продолжении остова полиэдра Вейля в достаточно малой окрестности точек, в которых якобиан $\dfrac{\partial(\chi_k,\chi_l)}{\partial(\zeta_1,\zeta_2)}$ отличен от нуля.

Л е м м а 2.3. *Пусть D — произвольный полиэдр Вейля, g — гладкая финитная функция, носитель m которого обладает окрестностью $U(m)$, в которой отображение*

$$\begin{cases} w_1=\chi_k(\zeta)\\ w_2=\chi_l(\zeta)\end{cases}$$

взаимно однозначно. Тогда функция

$$\psi(z)=\iint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}}\left|\bar{\partial}g\,D(q_k,q_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2\right|$$

ограничена на любом компакте $K\subset U(\overline{D})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\begin{cases} \zeta_1=\zeta_1(w)\\ \zeta_2=\zeta_2(w)\end{cases}$$

есть отображение, обратное (2.4). В интеграле $\psi(z)$ от переменных ζ_1,ζ_2 перейдем к переменным w_1,w_2

$$\psi(z)=\iint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}}\left|d\left\{g\frac{D(r_k,r_l)\,d\zeta_1 d\zeta_2}{\left[\chi_k(\zeta)-\chi_k(z)\right]\left[\chi_l(\zeta)-\chi_l(z)\right]}\right\}\right|=$$

$$= \iint\limits_{m^*\cap\tilde{\sigma}^*} \left| d\left\{ g^* \frac{D(r_k^*, r_l^*)\, d\zeta_1 d\zeta_2}{[w_1 - \chi_k(z)]\,[w_2 - \chi_l(z)]} \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(w_1, w_2)}\, dw_1 dw_2 \right\} \right|,$$

где $g^*(w) = g\bigl(\zeta(w)\bigr)$; $r_k^*(w, z) = r_k\bigl(\zeta(w)\bigr)$; $\widetilde{\sigma}^*$ — продолжение остова единичного бицилиндра внутрь; m^* — носитель функции g^*.

Далее

$$\psi(z) \leqslant \iint\limits_{\tilde{\sigma}^*} \left| \frac{\partial g^*}{\partial \bar{w}_1} \frac{D(r_k^*, r_l^*)\, d\zeta_1 d\zeta_2}{[w_1 - \chi_k(z)]\,[w_2 - \chi_l(z)]} \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(w_1, w_2)}\, d\bar{w}_1 dw_1 dw_2 \right| +$$

$$+ \iint\limits_{\tilde{\sigma}^*} \left| \frac{\partial g^*}{\partial \bar{w}_2} \frac{D(r_k^*, r_l^*)\, d\zeta_1 d\zeta_2}{[w_1 - \chi_k(z)]\,[w_2 - \chi_l(z)]} \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(w_1, w_2)}\, d\bar{w}_2 dw_1 dw_2 \right| \leqslant \tag{2.5}$$

$$\leqslant C \left\{ \iint\limits_{\tilde{\sigma}^*} \frac{|d\bar{w}_1 dw_1|\, |dw_2|}{|w_1 - \chi_k(z)|\, |w_2 - \chi_l(z)|} + \iint\limits_{\tilde{\sigma}^*} \frac{|d\bar{w}_2 dw_2|\, |dw_1|}{|w_1 - \chi_k(z)|\, |w_2 - \chi_l(z)|} \right\},$$

где

$$C = \max_{\substack{w\in m^* \\ z\in k \\ j=1,2}} \left| \frac{\partial g^*}{\partial \bar{w}_j} D(r_k^*, r_l^*) \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(w_1, w_2)} \right| < +\infty.$$

Покажем ограниченность, например, первого из интегралов в правой части неравенства (2.5)

$$\iint\limits_{\tilde{\sigma}^*} \frac{|d\bar{w}_1 dw_1|\, |dw_2|}{|w_1 - \chi_k(z)|\, |w_2 - \chi_l(z)|} = \int\limits_{|w|\leqslant 1} \frac{|d\bar{w}_1 dw_1|}{|w_1 - \chi_k(z)|} \int\limits_{|w_2|=|w_1|} \frac{|dw_2|}{|w_2 - \chi_l(z)|} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|w|\leqslant 1} \frac{|d\bar{w}_1 dw_1|}{|w_1 - \chi_k(z)|} \int\limits_{|w_2|=|w_1|} \frac{d\,|w_2 - \chi_l(z)| + |w_2 - \chi_l(z)|\, d\arg\left(w_2 - \chi_l(z)\right)}{|w_2 - \chi_l(z)|} \leqslant$$

$$\leqslant C' \int\limits_{|w|\leqslant 1} \frac{\ln\bigl||w_1| - |\chi_l(z)|\bigr|}{|w_1 - \chi_k(z)|}\, |d\bar{w}_1 dw_1| + 2\pi \int\limits_{|w|\leqslant 1} \frac{|d\bar{w}_1 dw_1|}{|w_1 - \chi_k(z)|},$$

где C' — константа. Ограниченность правой части теперь уже очевидна. Лемма доказана. □

Л е м м а 2.4 (о с н о в н а я л е м м а). *Пусть K — компакт в $U(\overline{D})$, Φ и g — те же, что и в лемме 2.1; кроме того, носитель m функции g удовлетворяет условию леммы 2.3. Тогда при всех $z \in K$ имеет место оценка*

$$J(z) \leqslant C\|\Phi\|_{\overline{D}}, \tag{2.6}$$

где

$$J(z) = \sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} \Phi g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2$$

является интегралом типа Вейля от функции Φg. Здесь $\|\Phi\|_{\overline{D}} = \max\limits_{\zeta\in\overline{D}} |\Phi(\zeta)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как множество $\partial D \bigcup \widetilde{\Delta}(D)$ нигде неплотно, то оценку (2.6) достаточно доказать для $z \in K \setminus \partial D \bigcup \widetilde{\Delta}(D)$. Формула (2.1), если учесть лемму 2.2, принимает вид

$$J(z) = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}} \Phi \bar{\partial} g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 - 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{N} \int\limits_{\lambda_{kl}^k} \frac{\Phi g r_{k\nu_k}\, d\zeta_{3-\nu_k}}{\dfrac{\partial \chi_k}{\partial \zeta_{\nu_k}} (\zeta_{3-\nu_k} - z_{3-\nu_k})},$$

или, обозначив через $J_k(z)$ сумму интегралов по λ_{kl}^k $(l = 1, \ldots, N)$,

$$J(z) = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}^k} \Phi \bar{\partial} g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 - 2\pi i \sum_{k=1}^{N} J_k(z). \tag{2.7}$$

Из леммы 2.3 следует, что для каждого тройного интеграла в равенстве (2.7) справедлива оценка

$$\left| \iiint\limits_{\widetilde{\sigma}_{kl}^k} \Phi \bar{\partial} g D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \right| \leqslant C_1 \|\Phi\|_{\overline{D}}, \quad z \in K. \tag{2.8}$$

Поскольку кривые λ_{kl}^k $(l = 1, 2 \ldots, N;\ l \neq k)$ лежат на поверхности $\big\{\zeta\colon\ \chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = 0\big\} \bigcap V(\overline{D})$, то, по условию а) они однолистно проектируются на плоскость $\zeta_{\nu_k} = 0$ в некоторые кривые γ_{kl}^k. Пусть $\zeta_{\nu_k} = \phi_{\nu_k}(\zeta_{3-\nu_k})$ есть уравнение поверхности $\big\{\zeta\colon\ \chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = 0\big\} \bigcap V(\overline{D})$. Тогда каждая кривая λ_{kl}^k задается условиями

$$\begin{cases} \zeta_{\nu_k} = \varphi_{\nu_k}(\zeta_{3-\nu_k}) \\ |\chi_l(\zeta)| = |\chi_k(z)| \\ |\chi_m(\zeta)| \leqslant |\chi_k(z)|, \quad m = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Перейдя в плоскость $\zeta_{\nu_k} = 0$, получим условия, определяющие их проекции γ_{kl}^k:

$$\gamma_{kl}^k = \big\{\zeta_{3-\nu_k}\colon\ |Q_l(\zeta_{3-\nu_k})| = |\chi_k(z)|;\ |Q_m(\zeta_{3-\nu_k})| \leqslant |\chi_k(z)|\big\}, \tag{2.9}$$

где $Q_i(\zeta_{3-\nu_k})$ получается из функции $\chi_i(\zeta_1, \zeta_2)$ подстановкой $\zeta_{\nu_k} = \varphi_{\nu_k}(\zeta_{3-\nu_k})$. Из (2.9) видно, что объединение $\gamma_k = \bigcup_l \gamma_{kl}^k$ служит границей аналитического полиэдра D_k на плоскости $\zeta_{\nu_k} = 0$

$$D_k = \big\{\zeta_{3-\nu_k}\colon\ |Q_l(\zeta_{3-\nu_k})| < |\chi_k(z)|,\ i = 1, \ldots, N;\ i \neq k\big\},$$

Перейдя в каждом интеграле $J_k(z)$ к переменной $\zeta_{3-\nu_k}$, получим

$$J_k(z) = \int\limits_{\gamma_k} \psi_z(\zeta_{3-\nu_k}) \frac{d\zeta_{3-\nu_k}}{\zeta_{3-\nu_k} - z_{3-\nu_k}},$$

где

$$\psi_z(\zeta_{3-\nu_k}) = \Phi g \frac{1}{\frac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}}\Bigg|_{\zeta_{\nu_k}=\varphi_{\nu_k}(\zeta_{3-\nu_k})}.$$

По формуле Коши–Грина

$$J_k(z) = 2\pi i\psi_z(z_{3-\nu_k}) - \iint\limits_{D_k} \frac{\partial\psi_z}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}} \frac{d\bar\zeta_{3-\nu_k} d\zeta_{3-\nu_k}}{\zeta_{3-\nu_k} - z_{3-\nu_k}},$$

если $z_{3-\nu_k} \in D_k$ и

$$J_k(z) = -\iint\limits_{D_k} \frac{\partial\psi_z}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}} \frac{d\bar\zeta_{3-\nu_k} d\zeta_{3-\nu_k}}{\zeta_{3-\nu_k} - z_{3-\nu_k}},$$

если $z_{3-\nu_k} \notin \overline{D}_k$. В обоих случаях имеем оценку

$$|J_k(z)| \leqslant 2\pi \max_{\substack{z\in K\\ \zeta_{3-\nu_k}\in\gamma_k}} |\psi_z| + \max_{\substack{z\in K\\ \zeta_{3-\nu_k}\in\gamma_k}} \left|\frac{\partial\psi_z}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}}\right| \iint\limits_{D_k} \frac{|d\bar\zeta_{3-\nu_k} d\zeta_{3-\nu_k}|}{|\zeta_{3-\nu_k} - z_{3-\nu_k}|}$$

или, учитывая, что $\dfrac{\partial\psi_z}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}} = \Phi g \dfrac{1}{\frac{\partial\chi_k}{\partial\zeta_{\nu_k}}} \dfrac{\partial g}{\partial\bar\zeta_{3-\nu_k}}$, получим

$$|J_k(z)| \leqslant C_2 \|\Phi\|_{\overline{D}}, \quad z \in K, \tag{2.10}$$

где C_2 от z не зависит. Из (2.7), (2.8) и (2.10) следует утверждение леммы. □

З а м е ч а н и е к л е м м е 2.4. Иногда под полиэдром Вейля понимают области более общего вида

$$D = \bigl\{z\colon\ \chi_k(z) \in B_k, \quad k = 1, \dots, N\bigr\},$$

где B_k — некоторая область на плоскости значений определяющей функции $\chi_k(z)$, граница которой является гладкой кривой. Нетрудно убедиться в том, что лемма 2.4 справедлива и для таких полиэдров.

§ 3. Приближение

В пространстве $\mathbb{C}^2$ выберем систему вещественных функций $\{g_l^\delta(z)\}\big|_{i=1}^\infty$, называемую разбиением единицы, если она удовлетворяет следующим условиям:

1° при всех i и $\delta > 0$ функция $g_l^\delta(z)$ неотрицательна, бесконечно дифференцируема, финитна и ее носитель m_i^δ имеет диаметр $< \delta$;

2° пересечение любого компакта с m_i^δ не пусто лишь для конечного числа значений i;

3° $\sum\limits_i g_l^\delta(z) \equiv 1, \quad z \in \mathbb{C}^2.$

Пусть D — невырожденный полиэдр Вейля; f — непрерывная и финитная функция, голоморфная в D, причем в тех точках $\tilde{\sigma}_{kl}$, в которых $f(z) \neq 0$, якобиан $\dfrac{\partial(\chi_k, \chi_l)}{\partial(z_1, z_2)}$ все еще не обращается в нуль. В соответствии с данным разбиением единицы, следуя А. Г. Витушкину [6], представим функцию f в виде
$$f(z) = \sum_{i=1}^{N(\delta)} f_i^\delta(z),$$
где
$$f_i^\delta(z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f \, g_l^\delta \, D(q_k, q_l) \, d\zeta_1 d\zeta_2.$$

В самом деле, используя формулу (1.5) и условие 3°, будем иметь
$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f \left(\sum_l g_l^\delta \right) D(q_k, q_l) \, d\zeta_1 d\zeta_2 =$$
$$= \sum_l \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f \, g_l^\delta \, D(q_k, q_l) \, d\zeta_1 d\zeta_2 = \sum_l f_i^\delta(z).$$

Благодаря условию 2° сумма здесь на самом деле конечная.

Л е м м а 3.1. *При достаточно малом δ для каждого i существует направление $a^i = (a_1^i, a_2^i)$ и число $\varepsilon_i > 0$ такие, что при всех ε из интервала $(0, \varepsilon_i)$ функция $f_{i,\varepsilon}(\zeta) = f(\zeta + \varepsilon a^i)$ голоморфна в некоторой окрестности V_ε множества $\Delta(D) \cap m_i^\delta$.*

Геометричский смысл этой простой леммы заключается в том, что при малых сдвигах в определенном направлении кусочек остова $\Delta(D) \cap m_i^\delta$ попадает внутрь полиэдра D. Всюду в дальнейшем число δ выбрано так, чтобы лемма 3.1 была бы в силе.

Л е м м а 3.2. *При любом ε из интервала $(0, \varepsilon_i)$ функция*
$$\iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon} \, g_l^\delta \, D(q_k, q_l) \, d\zeta_1 d\zeta_2$$
голоморфна в некоторой окрестности $\overline{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $\eta > 0$ положим

$$\tilde{\sigma}_{kl}^{\eta} = \bigl\{\zeta \in \tilde{\sigma}_{kl}\colon\ |\chi_k(\zeta)| = |\chi_l(\zeta)| = t, \quad 1 \leqslant t \leqslant \eta\bigr\},$$

и возьмем $\eta = \eta(\varepsilon)$ таким, чтобы множество $\tilde{\sigma}_{kl}^{\eta} \cap m_i^{\delta}$ содержалось в окрестности V_ε предыдущей леммы. Далее

$$\iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon}\, g_l^{\delta}\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 =$$

$$= \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}^{\eta}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon}\, g_l^{\delta}\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 + \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl} \smallsetminus \tilde{\sigma}_{kl}^{\eta}} \bar{\partial} f_{l,\varepsilon}\, g_l^{\delta}\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Первое слагаемое в правой части тождественно равно нулю, так как $\partial f_{i,\varepsilon}(\zeta) = 0$ при $\zeta \in \tilde{\sigma}_{kl}^{\eta} \cap m_i^{\delta}$. Второе же слагаемое голоморфно в окрестности $\overline{D}$, так как интегрирование в нем фактически производится по множеству $m_i^{\delta} \cap \bigl[\tilde{\sigma}_{kl} \smallsetminus \tilde{\sigma}_{kl}^{\eta}\bigr]$, которое находится от области D на положительном расстоянии. Лемма доказана. □

Т е о р е м а 3.1. *Пусть D — невырожденный полиэдр Вейля в пространстве $\mathbb{C}^2$, f — функция, голоморфная внутри D и непрерывная в $\overline{D}$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon_1 > 0$ существует функция $F(z)$, голоморфная в некоторой окрестности $\overline{D}$ и такая, что $|F(z) - f(z)| < \varepsilon_1$ при $z \in D$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжим f до функции, непрерывной и финитной во всем пространстве $\mathbb{C}^2$, причем так, чтобы в точках $\tilde{\sigma}_{kl}$, в которых $f(z) \neq 0$, якобиан $\dfrac{\partial(\chi_k, \chi_l)}{\partial(z_1, z_2)}$ не обращался бы в нуль. Устроим разбиение единицы и представим функцию f в виде $f = \sum\limits_{i=1}^{N(\delta)} f_i^{\delta}$. Каждое слагаемое f_i^{δ} будем приближать функцией

$$F_i(z;\varepsilon) = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial} f_{i,\varepsilon}\, g_l^{\delta}\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2,$$

которая по лемме 3.2 голоморфна в окрестности $\overline{D}$. Для того, чтобы оценить разность $F_i(z;\varepsilon) - f_i^{\delta}(z)$, понадобятся некоторые построения.

На плоскости комплексного переменного w_j выделим односвязную подобласть B_j^i единичного круга так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1° $\chi_j(m_i^{\delta} \bigcap D) \subset B_j^i$,

2° граница B_j^i является гладкой кривой,

3° каждый из полиэдров Вейля

$$G^i = \bigl\{z\colon\ \chi_j(z) \in B_j^i, \quad j = 1, 2, \ldots, N\bigr\}$$

удовлетворяет условию а) параграфа 2,

4° при $\varepsilon_1 < \varepsilon$ (см. лемму 3.1) функции $f_{i,\varepsilon}(z)$, $i = 1, 2, \ldots$ голоморфны на $\overline{G}^l$.

Условие 3° выполнимо за счет того, что полиэдр D невырожденный, а число δ можно взять сколь угодно малым. Кроме того, δ считаем выбранным так, чтобы лемма 2.3 была бы в силе. Имеем

$$F_i(z;\varepsilon) - f_i^\delta(z) = \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} \bar{\partial}(f_{i,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2$$

или, учитывая, что $\partial\tilde{\sigma}_{kl} = \sigma_{kl} + \bigcup\limits_m \tilde{\sigma}_{klm}$

$$\begin{aligned} F_i(z;\varepsilon) - f_i^\delta(z) = &\sum_{k<l} \iint\limits_{\sigma_{kl}} (f_{i,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 + \\ &+ \sum_{k<l} \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} \iint\limits_{\tilde{\sigma}_{klm}} (f_{i,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 - \\ &- \sum_{k<l} \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} (f_{i,\varepsilon} - f)\, \bar{\partial} g_l^\delta\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Согласно лемме 2.3 для тройных интегралов в равенстве (3.1) справедлива оценка

$$\left| \iiint\limits_{\tilde{\sigma}_{kl}} (f_{i,\varepsilon} - f)\, \bar{\partial} g_l^\delta\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \right| \leqslant C' \left\| f_{i,\varepsilon} - f \right\|_{\overline{D}}, \tag{3.2}$$

$z \in D$. Пусть ω_{kl}^l — ребра, составляющие остов полиэдра G^l. Из условия 1° следует, что на множестве $\left(\sigma_{kl} \setminus \omega_{kl}^l\right) \cup \left(\omega_{kl}^l \setminus \sigma_{kl}\right)$ функция g_l^δ равна нулю. Поэтому

$$\iint\limits_{\sigma_{kl}} (f_{i,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 = \iint\limits_{\omega_{kl}^l} (f_{i,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2. \tag{3.3}$$

По лемме 2.4 (см. замечание к ней)

$$\sum_{k<l} \iint\limits_{\omega_{kl}^l} (f_{i,\varepsilon} - f)\, g_l^\delta\, D(q_k, q_l)\, d\zeta_1 d\zeta_2 \leqslant C'' \left\| f_{i,\varepsilon} - f \right\|_{\overline{D}}, \tag{3.4}$$

$z \in D$. Из (3.1), (3.2), (3.4) а также учитывая, что двойная сумма в (3.1) по лемме 1.2 равна нулю, получим

$$\left| F_i(z;\varepsilon) - f_i^\delta(z) \right| \leqslant C \left\| f_{i,\varepsilon} - f \right\|_{\overline{D}}, \quad z \in \overline{D}$$

или

$$\left|\sum_{i=1}^{N(\delta)} F_i(z;\varepsilon) - \sum_{i=1}^{N(\delta)} f_i^{\delta}(z)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N(\delta)} C\, \|f_{i,\varepsilon} - f\|_{\overline{D}}\,. \tag{3.5}$$

Поскольку функция f непрерывна, ε можно выбрать так, чтобы

$$\sum_{i=1}^{N(\delta)} C\, \|f_{i,\varepsilon} - f\|_{D} < \varepsilon_1. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\left|\sum_{i=1}^{N(\delta)} F_i(z;\varepsilon) - f(z)\right| < \varepsilon_1, \quad z \in D,$$

т. е. функция $F(z) = \sum\limits_{i=1}^{N(\delta)} F_i(z;\varepsilon)$ является искомой. Теорема доказана. □

Полиэдр D называется полиномиальным, если функции $\chi_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, его определяющие, являются полиномами. Для таких полиэдров справедлива теорема Вейля (см. [5]), гласящая, что всякая функция, голоморфная в окрестности $\overline{D}$, равномерно аппроксимируется полиномами. Отсюда и из теоремы 3.1 следует

Т е о р е м а 3.2. *Пусть D — невырожденный полиномиальный полиэдр Вейля в пространстве C^2. Тогда всякая функция, голоморфная в D и непрерывная на замыкании $\overline{D}$, равномерно на $\overline{D}$ аппроксимируется полиномами.*

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Г. Витушкину, под руководством которого была выполнена эта работа и Г. М. Хенкину за обсуждение статьи.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Поступило 10. III. 1970

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ. $\mathbb{C}^2$ փարածության մեջ գփնվող Վեյլի բազմանիսփերում անալիփիկ ֆունկցիաներով մոփարկման մասին (ամփոփում)

Դիցուք D-ն $\mathbb{C}^2$ երկչափ կոմպլեքս փարածության մեջ ոչ էափոխվող Վեյլի բազմանիսփ է: Հոդվածում ապացուցվում է, որ ամեն մի ֆունկցիա, որն անալիփիկ է D-ում և անընդհափ է $\overline{D}$-ում, հավասարաչափ մոփարկվում է ֆունկցիաներով, որոնք անալիփիկ են $\overline{D}$-ի շրջա–կայքում:

A. I. PETROSYAN. On approximation in the space $\mathbb{C}^2$ on nondegenerate Weil polyhedra (summary)

Let D be a nondegenerate Weil polyhedron in two-dimensional complex space. It is proved, that every holomorphic in D and continuous in $\overline{D}$ function may be uniformly approximated by functions, holomorphic in the neighbourhood of D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wermer.* The hull of a curve in $\mathbb{C}^n$, Ann. Math., 68, 1958, 550–561.
2. *Е. М. Чирка.* Приближение непрерывных функций голоморфными на жордановых дугах в $\mathbb{C}^n$, ДАН СССР, 167, № 1, 1966, 38–40.
3. *Г. М. Хенкин.* Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях и некоторые приложения, Мат. сб., 78, 120, № 4, 1969, 611–632.
4. *H. Bremermann.* Die Charakterisierung Rungesher Gebiete durch plyurisubharmonishe Functionen, Math. Ann., 136, 1958, 173–186.
5. *В. С. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных, М., Физматгиз, 1964.
6. *А. Г. Витушкин.* Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, УМН, XXII, вып. 6 (138), 1967, 141–199.