

УДК 01.01.01

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О крайних точках некоторых множеств голоморфных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 30/I 1976)

Пусть D — единичный круг $|z| < 1$; K — выпуклый компакт на плоскости w ; $H^\infty(D)$ — пространство голоморфных и ограниченных в D функций; $H^\infty(D; K)$ — множество функций $f(z) \in H^\infty(D)$, для которых $f(D) \subset K$. Очевидно, $H^\infty(D; K)$ является выпуклым множеством в $H^\infty(D)$. Каковы крайние точки этого множества? В случае, когда K — круг $|w| \leq 1$, т. е. $H^\infty(D; K)$ является единичным шаром в $H^\infty(D)$, крайними точками, как известно, (см. [1], стр. 197) являются те и только те функции, которые удовлетворяют условию

$$\int_0^{2\pi} \log(1 - |f(e^{i\theta})|) d\theta = -\infty. \quad (1)$$

Целью настоящей работы является описание крайних точек множества $H^\infty(D; K)$ для довольно широкого класса выпуклых компактов K , а именно, для компактов, удовлетворяющих условию

(А): *граница ∂K компакта K в каждой своей точке имеет соприкосновение порядка не выше $n - 1$ (n — четное число) с опорной прямой.*

Напомним, что опорной к данному множеству K в данной точке $\zeta \in K$ называется прямая, проходящая через ζ и оставляющая K по одну сторону от себя.

В работе [2] описаны крайние точки множества $H^\infty(D; K)$ для компактов, удовлетворяющих некоторому условию, которое, как легко показать, эквивалентно условию (А) при $n = 2$.

На множестве K определим неотрицательную функцию

$$G(w) = \sup \{ |\zeta| : w \pm \zeta \in K \}, \quad w \in K. \quad (2)$$

Обозначим через $\rho(w, \partial K)$ расстояние между w и ∂K , т. е.

$$\rho(w, \partial K) = \inf_{t \in \partial K} |w - t|.$$

Л е м м а . Для выпуклых компактов K , удовлетворяющих условию (А), имеет место неравенство

$$G(w) \leq C \{\rho(w, \partial K)\}^{\frac{1}{n}}, \quad w \in K, \quad (3)$$

где C от w не зависит.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из условия (А) следует, что для каждой точки $\zeta \in \partial K$ и опорной прямой l , проходящей через ζ , существует окрестность D_ζ этой точки и парабола четного порядка n с вершиной ζ и с касательной l так, что ветви этой параболы охватывают множество $K \cap D_\zeta$. Множество

$$K' = K \setminus \left(\bigcup_{\zeta \in \partial K} D_\zeta \right)$$

компактно внутри K , т. е. $\rho(K', \partial K) > 0$. Ввиду того, что K — компакт, из определения (2) следует, что функция $G(w)$ ограничена некоторой константой M , $G(w) \leq M$. Пусть

$$C = \max \left\{ 1; M [\rho(K', \partial K)]^{-\frac{1}{n}} \right\}$$

Для $w \in K'$ имеем

$$G(w) \leq M \leq C [\rho(K', \partial K)]^{\frac{1}{n}} \leq C [\rho(w, \partial K)]^{\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

В случае же $w \in K \setminus K'$ выберем $\zeta_0 \in \partial K$ так, чтобы

$$\rho(w, \partial K) = \rho(w, \zeta_0). \quad (5)$$

Опорная прямая к компакт K через точку ζ_0 , очевидно, перпендикулярна к прямой d , соединяющей точки w и ζ_0 , иначе на ∂K существовали бы точки, расположенные к w ближе, чем ζ_0 , что противоречило бы (5). Проведя соответствующую параболу порядка n с осью d и с вершиной ζ_0 , убеждаемся, что

$$G(w) \leq |w - \zeta|^{1/n} = [\rho(w, \partial K)]^{1/n}. \quad (6)$$

Объединяя (4) и (6), получаем утверждение (3) леммы для всех точек $w \in K$. $\square$

Т е о р е м а . Пусть K — выпуклый компакт, удовлетворяющий условию (А). Для того, чтобы функция $f(z)$ являлась крайней точкой множества $H^\infty(D, K)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} \log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K) d\theta = -\infty. \quad (7)$$

Н е о б х о д и м о с т ь . Пусть интеграл в левой части (7) сходится. Функция

$$h(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K) d\theta \right\}$$

голоморфна и ограничена в круге D и для почти всех θ имеет место равенство $|h(e^{i\theta})| = \rho(f(e^{i\theta}), \partial K)$. Отсюда следует, что $f(e^{i\theta} \pm h(e^{i\theta})) \in K$ почти всюду, поэтому

$f(z) \pm h(z) \in K$, $z \in D$. Поскольку $h(z) \neq 0$, это значит, что $f(z)$ не является крайней точкой.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $g(z)$ голоморфна в D и $f(z) \pm g(z) \in K$. В силу определения (2) функции $G(w)$ имеем $|g(z)| \leq G(f(z))$. Учитывая (3), получим

$$|g(e^{i\theta})| \leq G(f(e^{i\theta})) \leq C [\rho(f(e^{i\theta}), \partial K)]^{1/n}.$$

Логарифмируя и интегрируя полученное неравенство, с учетом (7) будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \log |g(e^{i\theta})| d\theta \leq \log C + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \log \rho(f(e^{i\theta}), \partial K) d\theta = -\infty.$$

Отсюда следует, что $g(z) \neq 0$, т. е. $f(z)$ является крайней точкой множества $H^\infty(D; K)$. $\square$

Заметим, что в случае, когда K — круг, $\rho(f(e^{i\theta}), \partial K) = 1 - |f(e^{i\theta})|$, и условие (7) сводится к условию (1).

Ереванский Государственный Университет

Ա. Ի. Պետրոսյան

Հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ բազմությունների էքստրեմալ կետերի մասին բազմությունների մասին

Դիցուք D -ն միավոր շրջանն է, K -ն կոմպակտ և ուռուցիկ բազմություն է հարթության վրա, $H^\infty(D)$ -ով նշանակենք այն բոլոր հոլոմորֆ ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք արտապակերում են D -ն K -ի մեջ: $H^\infty(D)$ -ն D -ում հոլոմորֆ ու սահմանափակ ֆունկցիաների փարածությունում կազմում է ուռուցիկ բազմություն: Հոդվածում նկարագրված են $H^\infty(D)$ բազմության էքստրեմալ կետերը, երբ K -ն բավարարում է որոշ պայմաններին:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ը Ա Կ Ա Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

1. К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963.
2. H. M. Hilden, Duke Math. J., vol. 37, 1970, pp. 715–723.