

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

**Равномерное приближение полиномами на специальных
 полиэдрах Вейля с вещественно невырожденным остовом в
 пространстве $\mathbb{C}^2$**

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 15/II 1980)

В работе [1] доказано, что в вещественно невырожденном полиэдре Вейля D в пространстве $\mathbb{C}^2$ $\bar{\partial}$ -уравнение имеет решение, допускающее равномерную оценку. Из этого факта, а также из возможности локального голоморфного приближения на вещественно невырожденных полиэдрах с помощью более или менее стандартных рассуждений (см. например, [2]) следует, что пространство $A(D)$ функций, голоморфных в области D и непрерывных на $\bar{D}$, совпадает с равномерным замыканием на $\bar{D}$ полиномов $P(D)$.

В настоящей статье доказывается, что $P(D) = A(D)$ при менее обременительных в отношении невырожденности условиях на D , а именно: D имеет вещественно невырожденный остов; однако от полиэдра требуется, чтобы он был специальный, т. е. число определяющих его функций было равно двум (размерности пространства $\mathbb{C}^2$). Отметим, что класс специальных полиэдров в пространстве $\mathbb{C}^2$ достаточно широк в том смысле, что любой полиэдр по теореме Бишоп (см. [3]) можно аппроксимировать специальными.

Т е о р е м а . Пусть $D = \{z \in \mathbb{C}^2: |\chi_i(z)| < 1, i = 1, 2\}$ — полиномиальный полиэдр Вейля с вещественно невырожденным остовом. Тогда $P(D) = A(D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Напомним, что остов D — это его двумерная грань $\Gamma = \{z \in \bar{D}: |\chi_1(z)| = |\chi_2(z)| = 1\}$, а его вещественная невырожденность означает, что $d|\chi_1|^2 \wedge d|\chi_2|^2 \neq 0$ на Γ . Из этого условия теоремы следует, что можно подобрать столь малое число $\delta > 0$, чтобы полиэдр

$$G = \{z \in \mathbb{C}^2: 1 - \delta < |\chi_i(z)| < 1, i = 1, 2\},$$

который как бы «пристроен» к Γ , являлся вещественно невырожденным (в дальнейших рассуждениях число δ фиксировано). Как было отмечено выше, любая функция из $A(G)$ равномерно на $\bar{G}$ приближается функциями, голоморфными в

окрестности $\overline{G}$. Поэтому для любой f , $f \in A(D) \subset A(G)$, и $\varepsilon > 0$ найдется функция F_ε , голоморфная в некоторой окрестности $\overline{G}$ и такая, что

$$\max_{z \in \overline{G}} |f(z) - F_\varepsilon(z)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Далее, возьмем $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ таким, чтобы замыкание полиэдра

$$G_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^2: 1 - \delta < |\chi_i(z)| < 1 + \eta(\varepsilon), i = 1, 2\}$$

принадлежало упомянутой окрестности. Тогда F_ε будет голоморфной на $\overline{G}_\varepsilon$. Обозначим

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{z \in \overline{G}_\varepsilon: |\chi_1(z)| = |\chi_2(z)| = 1 + \eta(\varepsilon)\}; \\ \gamma_2 &= \{z \in \overline{G}_\varepsilon: |\chi_1(z)| = |\chi_2(z)| = 1\delta\}; \\ \gamma_3 &= \{z \in \overline{G}_\varepsilon: |\chi_1(z)| = 1 - \delta, |\chi_2(z)| = 1 + \eta(\varepsilon)\}; \\ \gamma_4 &= \{z \in \overline{G}_\varepsilon: |\chi_1(z)| = 1 + \eta(\varepsilon), |\chi_2(z)| = 1 - \delta\}. \end{aligned}$$

Остов полиэдра G_ε является объединением соответствующим образом ориентированных $\gamma_1 - \gamma_4$. Согласно интегральной формуле Вейля, для $z \in G_\varepsilon$ имеем

$$F_\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{4\pi_2} \int_{\gamma_k} F_\varepsilon(\zeta) \frac{J(\zeta, z) d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)]} = \sum_{k=1}^4 I_k(z), \quad (2)$$

где $J(\zeta, z) = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}$, P_{k1} и P_{k2} — коэффициенты Гедера полинома χ_k , определяемые из разложения

$$\chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = (\zeta_1 - z_1)P_{k1}(\zeta, z) + (\zeta_2 - z_2)P_{k2}(\zeta, z), \quad k = 1, 2.$$

Функция $I_1(z)$ из правой части (2) голоморфна в окрестности $\overline{D}$, так как при $\zeta \in \gamma_1$ и $z \in \overline{D}$ знаменатель $[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)]$ под знаком интеграла $I_1(z)$ в нуль не обращается. Как следует из доказываемой ниже леммы, имеет место неравенство $\max_{z \in \overline{D}} |F_\varepsilon(z) - I_1(z)| < c_1\varepsilon$, где число c_1 от ε не зависит. Вместе с (1) это дает $\max_{z \in \overline{D}} |f(z) - I_1(z)| =$ (по принципу максимума) $= \max_{x \in \Gamma} |f(z) - I_1(z)| < (1 + c_1)\varepsilon$,

т. е. f равномерно на $\overline{D}$ приближается функциями, голоморфными в окрестности $\overline{D}$, а в силу того, что D — полиномиальный полиэдр, то и полиномами. Итак, $f \in P(D)$, а поскольку f — произвольная функция из $A(D)$, то $P(D) = A(D)$. $\square$

Л е м м а . Для интегралов $I_2(z) - I_4(z)$ в (2) имеет место оценка

$$\max_{z \in \Gamma} |I_k(z)| < c\varepsilon, \quad k = 2, 3, 4.$$

где константа c от ε не зависит.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая γ_2 как остов полиэдра

$$\{z \in \mathbb{C}^2: |\chi_i(z)| < 1 - \delta, i = 1, 2\},$$

на замыкании которого функция f , по условию, голоморфна, по формуле Вейля, при $z \in \Gamma$ имеем

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_2} f(\zeta) \frac{J(\zeta, z) d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)]} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_2(z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_2} F_\varepsilon(\zeta) \frac{J(\zeta, z) d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)]} = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_2} [F_\varepsilon(\zeta) - f(\zeta)] \frac{J(\zeta, z) d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)]}. \end{aligned}$$

Так как $\gamma_2 \subset \overline{G}$, то из (1) для $z \in \Gamma$ получаем

$$|I_2(z)| \leq \frac{\varepsilon}{4\pi_2} \int_{\gamma_2} \left| \frac{J(\zeta, z) d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z)]} \right|. \quad (3)$$

Далее, $|\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)| \geq ||\chi_k(\zeta)| - |\chi_k(z)|| = \delta \quad (k = 1, 2)$ при $z \in \Gamma$ и $\zeta \in \gamma_2$. Отсюда и из (3) следует

$$\max_{z \in \Gamma} |I_2(z)| < c\varepsilon. \quad (4)$$

Интеграл I_3 (и аналогичный ему I_4) оценивается несколько сложнее. Рассмотрим вещественно трехмерную грань полиэдра G_ε

$$\sigma = \{\zeta \in G_\varepsilon: |\chi_1(\zeta)| = 1 - \delta, \quad 1 - \delta < |\chi_2(\zeta)| < 1 + \eta(\varepsilon)\}.$$

Эта грань ограничена циклами γ_2 и γ_3 . При фиксированном $z_0 \in \Gamma$ форма

$$\omega = F_\varepsilon(\zeta) \frac{J(\zeta, z_0) d\zeta_1 \wedge d\zeta_2}{[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z_0)][\chi_2(\zeta) - \chi_2(z_0)]}$$

имеет особенностями на σ кривую

$$P_{z_0} = \{\zeta \in \sigma: |\chi_1(\zeta)| = 1 - \delta_1, \quad \chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0)\},$$

а на $\sigma \setminus P_{z_0}$ эта форма замкнута. По формуле Стокса

$$\int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\sigma} d\omega + \int_{P_{z_0}} \text{res } \omega,$$

или

$$I_2(z_0) - I_3(z_0) = \int_{P_{z_0}} \text{res } \omega.$$

Отсюда и из (4) следует, что для оценки I_3 достаточно оценить $\int_{P_{z_0}} \text{res } \omega$. Здесь

$$\text{res } \omega = \frac{F_\varepsilon(\zeta) J(\zeta, z_0)}{\chi_1(\zeta) - \chi_1(z_0)} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_2} \right)^{-1} d\zeta_1 = - \frac{F_\varepsilon(\zeta) J(\zeta, z_0)}{\chi_1(\zeta) - \chi_1(z_0)} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \zeta_1} \right)^{-1} d\zeta_2.$$

Второе равенство следует из того, что на P_{z_0} имеем $\chi_2(\zeta) \equiv \chi_2(z_0)$, поэтому $d\chi_2 = 0$, т. е. $\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}\right)^{-1} d\zeta_1 = \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}\right)^{-1} d\zeta_2$. Если в выражении для $\text{res } \omega$ функцию F_ε заменить на f , то полученная форма

$$\Omega = \frac{f(\zeta)J(\zeta, z_0)}{\chi_1(\zeta) - \chi_1(z_0)} \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}\right)^{-1} d\zeta_1 = -\frac{f(\zeta)J(\zeta, z_0)}{\chi_1(\zeta) - \chi_1(z_0)} \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}\right)^{-1} d\zeta_2$$

во всех точках аналитической поверхности

$$T_{z_0} = \{\zeta: |\chi_1(\zeta)| < 1 - \delta, \chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0)\}$$

голоморфна, кроме особенностей $M \cap T_{z_0}$, где

$$M = \{\zeta \in \mathbb{C}^2: \text{grad } \chi_2(\zeta) = 0\}.$$

Но каждая связная компонента множества M — либо точка, либо уровень функции χ_2 (очевидно, отличный от уровня $\chi_2(\zeta) = \chi_2(z_0)$). Таким образом, на T_{z_0} могут быть только одноточечные компоненты множества M , поэтому для всех z из некоторой выколотой окрестности точки z_0 на поверхности T_z форма Ω особенностей не имеет. Заметив, что $\partial T_z = P_z$, по формуле Стокса будем иметь

$$\int_{P_z} \Omega = \int_{T_z} d\Omega = 0.$$

Интеграл $\int_{P_z} \Omega$, очевидно, от z зависит непрерывно (по крайней мере, в некоторой

окрестности точки z_0). Поэтому $\int_{P_{z_0}} \Omega = 0$. Отсюда, с учетом того, что

$|\chi_1(\zeta) - \chi_1(z_0)| \geq \delta$ при $\zeta \in P_{z_0}$, имеем

$$\left| \int_{P_{z_0}} \text{res } \omega \right| = \left| \int_{P_{z_0}} \text{res } \omega - \int_{P_{z_0}} \Omega \right| = \left| \int_{P_{z_0}} \frac{[F_\varepsilon(\zeta) - f(\zeta)]}{[\chi_1(\zeta) - \chi_1(z_0)]} \left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}\right)^{-1} J(\zeta, z_0) d\zeta_1 \right| < c\varepsilon$$

Если $\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}$ обращается в нуль в некоторых точках на P_{z_0} , то в этих точках $\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1} \neq 0$

и мы заменяем $\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_2}\right)^{-1} d\zeta_1$ на $-\left(\frac{\partial\chi_2}{\partial\zeta_1}\right)^{-1} d\zeta_2$.

Оценка интеграла $I_4(z)$ проводится аналогично. $\square$

В заключение автор выражает благодарность Г. М. Хенкину за интерес к работе и полезные обсуждения.

Ереванский государственный
университет

Ա. Ի. Պետրոսյան

$\mathbb{C}^2$ փարածության մեջ գրավող իրական իմաստով ոչ էափոխվող հենքով Վեյլի հատուկ բազմանիստերի վրա հավասարաչափ մոտարկում բազմանդամներով

Դիցուք D -ն երկչափ կոմպլեքս փարածության մեջ գրավող Վեյլի հատուկ բազմանիստ է, որի հենքը իրական իմաստով ոչ էափոխվող է: Բազմանիստը կոչվում է հատուկ, եթե նրան որոշող բազմանդամների քանակը համընկնում է փարածության չափողականության հետ: Նշենք, որ հատուկ բազմանիստերի ընդհանրված բավականին լայն է այն իմաստով, որ, ըստ Բիշոպի թեորեմի, կամայական բազմանիստ կարելի է մոտարկել հատուկներով:

Նոդվածում ապացուցվում է, որ կամայական ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է D -ում և անընդհատ է $\overline{D}$ -ում, մոտարկվում է բազմանդամներով հավասարաչափ $\overline{D}$ -ի վրա: Ապացուցման եղանակը ոգրագործում է $(^1)$ -ում սրացված $\bar{\partial}$ -հավասարման հավասարաչափ գնահատականով լուծումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Լ Ե Կ Ը Ն ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

1. А. И. Петросян, Г. М. Хенкин, Известия АН Арм. ССР, Матем., т. 13, №5–6 (1978).
2. J. Lieb, Math. Ann., vol. 184, №1, (1969).
3. Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические функции многих комплексных переменных, Мир, М., 1969.