

А. И. ПЕТРОСЯН

МНОЖЕСТВА ПИКА И ИНТЕРПОЛЯЦИИ АЛГЕБР ГЛАДКИХ
ФУНКЦИЙ В ПОЛИДИСКЕ И В ТРУБЕ БУДУЩЕГО*(Представлено академиком В. С. Владимировым 21 IV 1987)*

В работе получено полное описание множеств пика алгебр голоморфных в полидиске и в трубе будущего функций A^m в случае нецелых m , $m > 2$. В случае целых m получено достаточное условие, весьма близкое к необходимому. Доказано, что всякое множество пика для A^m является также и интерполяционным для A^m при нецелых $m > 2$.

Задаче описания множеств пика и интерполяции для A^m посвящено немало работ. Хорошо известно, что в одномерном случае множества пика и интерполяции для диск-алгебры $A^0(U)$ суть замкнутые подмножества окружности лебеговой меры нуль. Для алгебры гладких функций $A^m(U)$, $m \leq 1$, эти множества уже не совпадают: множества пика конечны (см. [1]), а интерполяционные множества могут быть и бесконечными и определяются условием, которое дано в [2].

В многомерном случае множества пика и интерполяции естественнее рассматривать на остовах, а не на границе полидиска. Наиболее полно исследован случай полидиска-алгебры $A^0(U^n)$. Установлено (см. [3]), что множества пика и интерполяции характеризуются тем, что вариация любой ортогональной меры на них равна нулю. Есть более геометричное (но только достаточное) условие в терминах S -ширины – теорема Форелли, приведенная в [3]. Другое достаточное условие в том случае, когда множества пика лежат на гладком многообразии, дано в [4]. В случае гладких функций Саеренс и Статут [5] доказали следующее необходимое условие на множество пика: если K является множеством пика для $A^m(U^n)$, $m \geq 1$, то в некоторой окрестности множества K существует пространственноподобное многообразие M класса C^m такое, что $K \subset M$. В [5] исследована также достаточность этого условия и получено, что для всякого компактного подмножества C^m -гладкого пространственноподобного многообразия существует функция пика из $A^{m-4}(U^n)$. В теореме 1 доказывается, что эту функцию при нецелом $m > 2$ можно выбрать из $A^m(U^n)$, т. е. достигается максимально возможная гладкость функции пика; при целых m получается некоторая потеря гладкости: функция пика принадлежит $A^{m-0} = \bigcap_{r < m} A^r$. Пока неизвестно, является ли эта потеря неизбежной. В теореме 3 дается достаточное условие на интерполяционное множество для $A^m(U^n)$.

Доказательства теорем основаны на оценке роста производных решения соответствующего $\bar{\partial}$ -уравнения при подходе к особенностям правой части (лемма 2). При построении «почти аналитической» функции пика (лемма 1) используется метод, который позволяет вложить полидиск специальным образом в строго псевдовыпуклую область (см. [6]). Для строго псевдовыпуклой области способ построения «почти аналитической» функции пика дан в [7] (см. также [8]).

Нам понадобятся следующие определения и обозначения. Через U^n обозначается единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^n$:

$$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: |z_i| < 1, i = 1, \dots, n\},$$

$\mathbb{T}^n$ — его остов,

$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: |z_i| = 1, i = 1, \dots, n\}.$$

C^1 -гладкое многообразие M в некотором открытом подмножестве остова называется пространственно подобным, если в каждой точке $q \in M$ выполняется условие $T_q(M) \cap \overline{C}_q = \{0\}$. Здесь $T_q(M)$ — касательное пространство к M в точке q ; $\overline{C}_q$ — замыкание положительного конуса в $T_q(\mathbb{T}^n)$, образованного касательными векторами

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right|_q, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial \theta_n} \right|_q, \quad \theta_i = \arg z_i.$$

Для целого числа $m \geq 0$ через $A^m(U^n)$ обозначается алгебра функций, голоморфных в U^n , у которых все производные порядка не ниже m непрерывно продолжаются на $\overline{U}^n$. Если же m нецелое, $m = [m] + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, то $A^m(U^n)$ обозначает подалгебру тех функций из $A^{[m]}(U^n)$, у которых производные порядка m удовлетворяют в U^n условию Гельдера с показателем α .

Подмножество K остова называется множеством пика для $A^m(\mathbb{D}^n)$, если существует $f \in A^m(U^n)$, такая, что $f|_K \equiv 1$ и $|f| < 1$ на $\overline{\mathbb{D}^n} \setminus K$.

Теорема 1. Пусть K — компактное подмножество остова $\mathbb{T}^n$, число $m > 2$ — нецелое. Следующие условия эквивалентны:

- 1) K — множество пика для $A^m(U^n)$.
- 2) В некоторой окрестности множества K существует пространственноподобное многообразие M класса C^m такое, что $K \subset M$.

Теорема 2. Если $m > 2$ — целое число, то:

- а) Всякое компактное подмножество пространственноподобного многообразия класса C^m является множеством пика для $A^{m-0}(U^n)$;
- б) Всякое компактное подмножество пространственноподобного многообразия класса $C^{m+0} = \bigcup_{r>m} C^r$ является множеством пика для $A^m(U^n)$.

Лемма 1. Пусть M — пространственноподобное многообразие класса C^m , $m > 2$, K — его компактное подмножество. Тогда в некоторой окрестности Ω компакта K существует функция $F \in C^m(\Omega)$ такая, что

- а) На множестве $\overline{U}^n \cap \Omega$ нули функции F совпадают с K .
- б) $|F(z)| > cd(z, M)$, $z \in \overline{U}^n \cap \Omega$, где $d(z, M)$ — расстояние между z и M , константа c от z не зависит.
- в) $\operatorname{Re} F(z) > 0$ при $z \in (\overline{U}^n \cap \Omega) \setminus K$.
- г) $|\bar{\partial} F(z)| = O(d^{m-1}(z, M))$ при $z \rightarrow M$.

Обратим внимание на то, что, в отличие от случая строго псевдовыпуклой области (см. [7]), в неравенстве б) $d(z, M)$ участвует в первой, а не во второй степени. Это улучшение оценки является следствием того, что остов полидиска не имеет комплексных касательных векторов.

Далее, возьмем бесконечно дифференцируемую, финитную в Ω функцию $\lambda(z)$, тождественно равную единице в некоторой окрестности K , и рассмотрим $\bar{\partial}$ -замкнутую форму типа $(0,1)$

$$g(z) = \sum_{i=1}^n g_i(z) d\bar{z}_i = \begin{cases} \bar{\partial} [\lambda(z) F^{-1}(z)], & \text{если } z \in U^n \cap \Omega, \\ 0 & \text{в остальных точках } U^n. \end{cases}$$

Коэффициенты этой формы на множестве $U^n \setminus K$ бесконечно дифференцируемы, и их производные при $z \rightarrow K$ имеют степенной рост.

Следующая лемма, возможно, представляет и самостоятельный интерес.

Л е м м а 2. Пусть M и K — те же, что в лемме 1, $k \geq 3$ — натуральное число. Уравнение $\bar{\partial}u = g$ имеет в U^n решение $u_k(z)$, бесконечно дифференцируемое на $U^n \setminus K$ и удовлетворяющее условиям:

1) Если m — целое число, то

$D^p u(z)$ непрерывна на U^n при $0 \leq |p| \leq m-3$,

$$D^p u(z) = \begin{cases} O(\log |d(z, M)|) & \text{при } |p| = m-2, \\ O(d^{m-2-|p|}(z, M)) & \text{при } m-1 \leq |p| \leq m+k-3. \end{cases}$$

2) Если m — нецелое число, то

$D^p u(z)$ непрерывна на $\bar{U}^n$ при $0 \leq |p| \leq [m]-2$,

$D^p u(z) = O(d^{m-2-|p|}(z, M))$ при $[m]-1 \leq |p| \leq [m]+k-3$.

Здесь $p = (p_1, \dots, p_{2n})$ — целочисленный вектор, $|p| = p_1 + \dots + p_{2n}$,

$$D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n} \partial \bar{z}_1^{p_{n+1}} \dots \partial \bar{z}_n^{p_{2n}}}.$$

В качестве $u_k(z)$ берется решение $\bar{\partial}$ -уравнения, минимальное в пространстве L^2 с весом $[(1-|z_1|^2) \dots (1-|z_n|^2)]^{k-1}$. В [9] дана явная формула для этого решения.

Т е о р е м а 3. Пусть K — компактное подмножество остова, число $m > 2$ — нецелое. Если K является множеством пика для $A^m(U^n)$, то для всякой функции $f \in C^m(K)$ существует $F \in A^m(U^n)$ такая, что $F|_K = f|_K$, т. е. K — интерполяционное множество для $A^m(U^n)$.

Отметим, что эта теорема является усилением соответствующего результата из [5], где доказано, что при условиях теоремы 3 функции, принадлежащие $C^m(K)$, интерполируются функциями из несколько более широкого класса, чем $A^m(U^n)$.

Все приведенные выше теоремы обобщаются на произвольные трубчатые конусы в пространстве $\mathbb{C}^n$. Приведем формулировку одной из них для трубы будущего τ^+

$$\tau^+ = \{z \in \mathbb{C}^n: y_1^2 > y_2^2 + \dots + y_n^2, \quad y_1 > 0\}.$$

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы компактное подмножество K остова трубы будущего τ^+ было множеством пика для $A^m(\tau^+)$ ($m > 2$ — нецелое), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности K существовало пространственноподобное многообразие M класса C^m такое, что $K \subset M$.

Ереванский государственный университет

Поступило 4 V 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor B.A., Williams D.L. — Proc. Amer. Math. Soc., 1970, vol. 24, p. 604–606.
2. Alexander H., Taylor B.A., Williams D.L. — J. Math. Anal. Appl., 1971, vol. 36, №3, p. 556–566.
3. Рудин У. — Теория функций в поликруге. М.: Мир, 1974, 160 с.
4. Saerens R. — Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. 4, 1984, vol. 11, №2, p. 177–211.
5. Saerens R., Stout E.L. — Preprint, University of Washington, 1984.
6. Владимиров В.С., Сергеев А.Г. — В сб.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. М., 1985, т. 8, с. 191–266.
7. Туманов А.Е., Хенкин Г.М. — В сб.: Матем. прог. и смежные вопросы. М., 1976, с. 74–86.
8. Chaumat J., Chollet A.M. — Ann. Inst. Fourier. 1979, vol. 29, №3, p. 171–200.
9. Charpentier Ph. — Ann. Inst. Fourier. 1980, vol. 30, №4, p. 121–154.