

ВЕСОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПОЛИДИСКЕ И В ПРОСТРАНСТВЕ C^n

А. И. Петросян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика,
т. 31, № 1, 1996

В статье получена формула типа Коши–Грина для класса функций $f(z)$, определенных в единичном полидиске D^n . Эта формула выделяет из функции f ее “аналитическую часть”, которая получает операторную интерпретацию. Аналогичные результаты получены для функций, определенных в пространстве C^n .

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D – единичный круг на комплексной плоскости, $f(z)$ – комплексозначная функция, непрерывная на \overline{D} вместе со своей производной $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Известная формула Коши–Грина

$$f(z) = P(f)(z) + T(\bar{\partial}f)(z), \quad (1)$$

где

$$P(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$
$$T(\bar{\partial}f)(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z},$$

является эффективным техническим средством теории функций одного комплексного переменного. Ее удачное применение привело ко многим глубоким результатам, среди которых отметим, к примеру, решение проблемы “короны” для круга в работе Л. Карлесона [1] и решение проблемы равномерной аппроксимации на компактных подмножествах плоскости в работе А. Витушкина [2]. Еще одно применение формулы (1), связанное с $\bar{\partial}$ -уравнением, основано на том, что эта формула выделяет “аналитическую часть” функции f . Это позволяет выписать в явном виде решение неоднородного уравнения Коши–Римана $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g$, где

g – функция, непрерывная на \overline{D} . А именно, одним из решений этого уравнения является функция $T(g d\bar{z})$.

Интегральные представления для функций многих комплексных переменных, которые являются аналогами (1), были получены сравнительно недавно. За историей этого вопроса мы отсылаем к обзорной статье Хенкина [3], где можно найти также много примеров использования метода интегральных представлений в многомерном комплексном анализе.

Выбирая соответствующим образом весовые сомножители к функции f из (1), можно получить различные весовые формулы. Например, применяя (1) к функции

$$f_z(\zeta) = \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\bar{\zeta}} \right)^{\alpha+1} f(\zeta), \quad \alpha > -1, \quad z \in D$$

и учитывая, что $f_z(z) = f(z)$ и $f_z(\zeta) = 0$, при $|\zeta| = 1$, получим

$$f(z) = \frac{\alpha+1}{2\pi i} \int_D f(\zeta) \frac{(1 - |\zeta|^2)^\alpha}{(1 - z\bar{\zeta})^{\alpha+2}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\bar{\zeta}} \right)^{\alpha+1} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}. \quad (2)$$

Одно из преимуществ весовых формул типа (2) по сравнению с (1) заключается в том, что они позволяют выписывать формулы решения $\bar{\partial}$ -уравнения и в том случае, когда правая часть неограничена у границы области. Формула (2) обладает еще одним замечательным свойством: выделяемая ею “аналитическая часть” является проекцией в соответствующем весовом L^2 -пространстве на подпространство голоморфных функций, поэтому выписываемые с ее помощью формулы решения $\bar{\partial}$ -уравнения имеют минимальную норму в этом пространстве.

Если функция f голоморфна, т.е. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$, то второе слагаемое в (2) исчезает. Для этого случая формула впервые получена (другим способом) в [4]. В дальнейшем, в работе М. Джрабашяна [5] были введены ядра более общего типа и получены соответствующие интегральные представления (см. ниже теорему А). В той же работе [5] дано интегральное представление гладких функций, заданных на всей плоскости (Теорема В).

В настоящей работе получены многомерные интегральные представления функций, заданных в полидиске (§1) и в пространстве \mathbf{C}^n (§2).

§1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПОЛИДИСКЕ

1.1. Предполагая, что $\rho > 0$, $\alpha > -1$, $\gamma > -2$ и $\mu = \frac{2+\gamma}{\rho}$, рассмотрим функцию типа Миттаг–Леффлера

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + \frac{k}{\rho})},$$

а также функции

$$\Phi(z, \zeta) \equiv \Phi(z, \zeta; \rho, \alpha, \gamma) = \frac{\rho}{2\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-t} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} z \bar{\zeta}; \mu) dt, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Psi(z, \zeta) &\equiv \Psi(z, \zeta; \rho, \alpha, \gamma) = \\ &= 1 - \frac{\rho(\zeta - z)}{\Gamma(1+\alpha)\zeta} \int_0^{|\zeta|} (1 - r^\rho)^\alpha r^{\gamma+1} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha+\mu} E_{\rho/2}(t^{2/\rho} r^2 z / \zeta; \mu) dt dr. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема А. (см. [5]) Пусть f является гладкой функцией на \overline{D} . Тогда для любого $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_D (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma f(\zeta) \Phi(z, \zeta) dV_2(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \Psi(z, \zeta) \frac{dV_2(\zeta)}{\zeta - z}. \quad (5)$$

Отметим, что формула (2) является частным случаем (5), когда $\rho = 2$, $\gamma = 0$.

Соответственно

$$\Phi(z, \zeta; 2, \alpha, 0) = \frac{\alpha + 1}{(1 - z\bar{\zeta})^{\alpha+2}}, \quad \Psi(z, \zeta; 2, \alpha, 0) = \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - z\bar{\zeta}} \right)^{\alpha+1}.$$

Перечислим те свойства ядер Φ и Ψ , на которых основывается доказательство теоремы А :

a1). При фиксированном $z \in D$ функция $\Psi(z, \zeta)$ является гладкой на $\overline{D} \setminus \{0\}$ и удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial \Psi(z, \zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = (z - \zeta) (1 - |\zeta|^\rho)^\alpha |\zeta|^\gamma \Phi(z, \zeta).$$

б1). При $\zeta \rightarrow 0$

$$\Psi(z, \zeta) = \begin{cases} 1 + O(|\zeta|^{\gamma+1}), & \text{при } z \neq 0, \\ 1 + O(|\zeta|^{\gamma+2}), & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

в1). $\Psi(z, \zeta) = 0$, при $|\zeta| = 1$.

г1). $\Psi(z, z) = 1$, при $z \neq 0$ и $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi(0, \zeta) = 1$.

1.2. Приведем необходимые нам обозначения :

$D^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_k| < 1, k = 1, \dots, n\}$ – единичный полидиск в пространстве \mathbf{C}^n

$$\overline{D}_k f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i \frac{\partial f}{\partial y_k} \right), \quad \overline{\partial} f = \sum_{k=1}^n \overline{D}_k f \, d\bar{z}_k,$$

$$d\bar{z}[k] = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n,$$

$$d\bar{z} \wedge dz = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n.$$

Пространство \mathbf{C}^n предполагается ориентированным так, что $d\bar{z} \wedge dz = (2i)^n dV_{2n}$,

где dV_{2n} означает $2n$ -мерную меру Лебега в $\mathbf{C}^n \approx \mathbf{IR}^{2n}$. Обозначим через (j_1, \dots, j_{n-k}) мультииндекс, дополнительный к (i_1, \dots, i_k) . Для заданных чисел $\rho_k > 0$, $\alpha_k > -1$, $\gamma_k > -2$ ($k = 1, \dots, n$) пусть $\mu_k = \frac{2 + \gamma_k}{\rho_k}$ и $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Пространство функций f , имеющих норму

$$\left[\int_{D^n} |f(\zeta)|^p \prod_{k=1}^n (1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k} |\zeta_k|^{\gamma_k} \, dV_{2n} \right]^{1/p} < \infty,$$

обозначим через $L_{\rho, \alpha, \gamma}^p(D^n)$.

Теорема 1. Пусть f – гладкая в D^n функция такая, что $f, \overline{D}_k f \in L_{\rho, \alpha, \gamma}^p(D^n)$, $k = 1, \dots, n$. Тогда имеет место интегральное представление

$$f(z) = P_{\rho, \alpha, \gamma}(f)(z) + T_{\rho, \alpha, \gamma}(\overline{\partial} f)(z), \quad (6)$$

где

$$P_{\rho, \alpha, \gamma}(f)(z) = \frac{1}{\pi^n} \int_{D^n} f(\zeta) \prod_{m=1}^n (1 - |\zeta_m|^{\rho_m})^{\alpha_m} |\zeta_m|^{\gamma_m} \Phi(z_m, \zeta_m) \, dV_{2n}(\zeta), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T_{\rho, \alpha, \gamma}(\overline{\partial} f)(z) &= \\ &= \frac{1}{\pi^n} \sum_{k=0}^{n-1} (n - k - 1)! \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{D^n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} (\bar{z}_{j_m} - \bar{\zeta}_{j_m}) D_{j_m} f \right] \Psi(z_{j_1}, \zeta_{j_1}) \times \dots \\ &\dots \times \Psi(z_{j_{n-k}}, \zeta_{j_{n-k}}) \prod_{m=1}^k (1 - |\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}})^{\alpha_{i_m}} |\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}} \Phi(z_{i_m}, \zeta_{i_m}) \frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2k}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что условия на функцию f по сравнению с теоремой А ослаблены : вместо гладкости на \overline{D} требуется гладкость в D и условие $\overline{D}_k f \in L_{\rho, \alpha, \gamma}^1(D^n)$.

Предварительно докажем лемму, имеющую сугубо технический характер, введя для краткости записи следующие обозначения :

$$\Psi_m = \Psi(z_m, \zeta_m; \rho_m, \alpha_m, \gamma_m), \quad \Phi_m = \Phi(z_m, \zeta_m; \rho_m, \alpha_m, \gamma_m),$$

$$\tilde{\Phi}_m = (1 - |\zeta_m|^{\rho_m})^{\alpha_m} |\zeta_m|^{\gamma_m} \Phi_m,$$

$$A_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \dots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \dots \tilde{\Phi}_{i_k} \frac{|\zeta_{i_1} - z_{i_1}|^2 + \dots + |\zeta_{i_k} - z_{i_k}|^2}{|\zeta - z|^{2n-2k+2}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta,$$

$$1 \leq k \leq n,$$

$$B_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{D^n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} (\bar{z}_{j_m} - \bar{\zeta}_{j_m}) \bar{D}_{j_m} f \right] \Psi_{j_1} \dots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \dots \tilde{\Phi}_{i_k} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n-2k}},$$

$$0 \leq k \leq n-1.$$

Лемма. Пусть $f \in C^1(D^n)$. Тогда $A_k = \frac{1}{n-k} (B_k + A_{k+1})$, $1 \leq k \leq n-1$.

Доказательство. Используя тождество

$$\frac{|\zeta_{i_1} - z_{i_1}|^2 + \dots + |\zeta_{i_k} - z_{i_k}|^2}{|\zeta - z|^{2n-2k+2}} = \frac{1}{n-k} \sum_{m=1}^{n-k} \bar{D}_{j_m} \frac{\bar{\zeta}_{j_m} - \bar{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}},$$

справедливость которого проверяется непосредственным вычислением, будем

иметь

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{n-k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{m=1}^{n-k} \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \dots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \dots \tilde{\Phi}_{i_k} \bar{D}_{j_m} \frac{\bar{\zeta}_{j_m} - \bar{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \\ &= \frac{1}{n-k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{m=1}^{n-k} (-1)^{j_m-1} \times \\ &\quad \times \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \dots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \dots \tilde{\Phi}_{i_k} d\zeta \left[\frac{\bar{\zeta}_{j_m} - \bar{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} d\bar{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим следующие формы бистепени $(n, n-1)$ при фиксированной точке $z \in D^n$:

$$\lambda = \lambda_{i_1, \dots, i_k, j_m} = \Psi_{j_1} \dots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \dots \tilde{\Phi}_{i_k} \frac{\bar{\zeta}_{j_m} - \bar{z}_{j_m}}{|\zeta - z|^{2n-2k}} d\bar{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta,$$

которые имеют особенности в точке $\zeta = z$ и на координатных плоскостях

$\{\zeta_p = 0\}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Применяя формулу Стокса в области $D^n \setminus (B_\varepsilon \cup V_\varepsilon)$,

где

$$B_\varepsilon = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}, \quad V_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^n \{\zeta : |\zeta_k| < \varepsilon\},$$

получим

$$\int_{\partial D^n} \lambda - \int_{\partial B_\varepsilon} \lambda - \int_{\partial V_\varepsilon} \lambda = \int_{D^n \setminus (B_\varepsilon \cup V_\varepsilon)} d\lambda. \quad (10)$$

Интеграл по ∂V_ε стремится к нулю вместе с ε в силу свойства б1). Оценим интеграл по сфере ∂B_ε :

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} \lambda \right| \leq C \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \frac{|d\bar{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta|}{|\zeta-z|^{2n-2k-1}} \leq C \frac{1}{\varepsilon^{2n-2k-1}} \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} dS_{2n-1} \leq C \varepsilon^{2k},$$

где C – константа. Пересядя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая, что $\lambda = 0$ на ∂D^n , из (10) получим $\int_{D^n} d\lambda = 0$, или

$$\begin{aligned} & \int_{D^n} d\zeta \left[f \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \cdots \tilde{\Phi}_{i_k} \right] \frac{\bar{\zeta}_{j_m} - \bar{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}} d\bar{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta + \\ & + \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \cdots \tilde{\Phi}_{i_k} d\zeta \left[\frac{\bar{\zeta}_{j_m} - \bar{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}} d\bar{\zeta}[j_m] \wedge d\zeta \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (9), с учетом свойства а1)

$$\begin{aligned} A_k &= \\ &= \frac{1}{n-k} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \int_{D^n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} (\bar{z}_{j_m} - \bar{\zeta}_{j_m}) \bar{D}_{j_m} f \right] \Psi_{j_1} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \cdots \tilde{\Phi}_{i_k} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta-z|^{2n-2k}} + \\ &+ \frac{1}{n-k} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{m=1}^{n-k} \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \bar{D}_{j_m} \Psi_{j_m} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \cdots \tilde{\Phi}_{i_k} \frac{\bar{\zeta}_{j_m} - \bar{z}_{j_m}}{|\zeta-z|^{2n-2k}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \\ &= \frac{1}{n-k} B_k + \frac{1}{n-k} \times \\ &\times \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{m=1}^{n-k} \int_{D^n} f \Psi_{j_1} \cdots \tilde{\Phi}_{j_m} \cdots \Psi_{j_{n-k}} \tilde{\Phi}_{i_1} \cdots \tilde{\Phi}_{i_k} \frac{|\bar{\zeta}_{j_m} - \bar{z}_{j_m}|^2}{|\zeta-z|^{2n-2k}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta. \end{aligned}$$

Объединяя слагаемые, имеющие одинаковый набор индексов, получим утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Напомним формулу Мартинелли–Бохнера для гладких функций (см., например, [6]) :

$$u(z) = \int_{\partial G} u(\zeta) \omega'(\zeta, z) - \int_G \bar{\partial} u(\zeta) \wedge \omega'(\zeta, z), \quad (11)$$

где $u(z)$ – функция, гладкая на замыкании ограниченной области G с кусочно-гладкой границей, $\omega'(\zeta, z)$ – форма бистепени $(n, n-1)$, имеющая вид

$$\omega'(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n |\zeta - z|^{2n}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta.$$

Рассмотрим сперва случай, когда f – гладкая на \overline{D}^n функция. Применяя (11) в области $G = D^n \setminus V_\varepsilon$, где V_ε определяется как в лемме, к функции

$$u_z(\zeta) = f(\zeta) \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n),$$

и учитывая свойство г1), будем иметь

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\partial D^n} f(\zeta) \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) \omega'(\zeta, z) - \int_{\partial V_\varepsilon} f(\zeta) \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) \omega'(\zeta, z) - \\ &- \int_{D^n} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) \omega'(\zeta, z) - \int_{D^n} f(\zeta) \bar{\partial} [\Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n)] \wedge \omega'(\zeta, z). \end{aligned} \quad (12)$$

Как и в лемме получим, что интеграл по ∂V_ε стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, а интеграл по ∂D^n равен нулю. Итак

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{D^n} \left[\sum_{k=1}^n (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) \overline{D}_k f \right] \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} - \\ &- \int_{D^n} f(\zeta) \left[\sum_{i=1}^n \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \overline{D}_i \Psi(z_i, \zeta_i) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) d\bar{\zeta}_i \right] \wedge \omega'(\zeta, z) = \\ &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int_{D^n} \left[\sum_{k=1}^n (\bar{z}_k - \bar{\zeta}_k) \overline{D}_k f \right] \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} + \right. \\ &\left. + \int_{D^n} f(\zeta) \left[\sum_{i=1}^n \Psi(z_1, \zeta_1) \cdots \widetilde{\Phi}(z_i, \zeta_i) \cdots \Psi(z_n, \zeta_n) |\zeta_i - z_i|^2 \right] \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} \right\}. \end{aligned}$$

В обозначениях леммы это равенство выглядит следующим образом :

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} (B_0 + A_1). \quad (13)$$

Из леммы последовательно получаем

$$A_1 = \frac{1}{n-1} B_1 + \frac{1}{n-1} A_2 = \frac{1}{n-1} B_1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{n-2} B_2 + \frac{1}{n-2} A_3 \right) = \cdots$$

$$= \frac{1}{n-1} B_1 + \frac{1}{(n-1)(n-2)} B_2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} B_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} A_n. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left[B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-1) \cdots (n-k)} B_k + \frac{1}{(n-1)!} A_n \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} A_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(2\pi i)^n} B_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что согласно определению A_k, B_k и $\tilde{\Phi}_k$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^n} A_n &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{D^n} f(\zeta) \tilde{\Phi}_1 \cdots \tilde{\Phi}_n \frac{|\zeta_1 - z_1|^2 + \cdots + |\zeta_n - z_n|^2}{|\zeta - z|^2} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \\ &= \frac{1}{\pi^n} \int_{D^n} f(\zeta) \tilde{\Phi}_1 \cdots \tilde{\Phi}_n dV_{2n}(\zeta) = P_{\rho, \alpha, \gamma}(f)(z); \\ &\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{(2\pi i)^n} B_k = T_{\rho, \alpha, \gamma}(\bar{\partial}f)(z), \end{aligned}$$

и утверждение теоремы 1 для функций, гладких на \overline{D}^n , следует из (15).

Рассмотрим, наконец, случай произвольной функции, которая удовлетворяет условию теоремы 1. Пусть $g_p(t)$ – последовательность функций, гладких на $[0, \infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$g_p(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1 - \frac{3}{p}, \\ 0 & \text{при } t \geq 1 - \frac{1}{p}, \end{cases} \quad |g'_p(t)| \leq p. \quad (16)$$

Существование $g_p(t)$ очевидно. Пусть $h_p(z) = g_p(|z_1|) \cdots g_p(|z_n|)$ для $z \in \mathbb{C}^n$. Так как функции fh_p гладкие на \overline{D}^n , то, по доказанному

$$\begin{aligned} f(z)h_p(z) &= P_{\rho, \alpha, \gamma}(fh_p)(z) + T_{\rho, \alpha, \gamma}(\bar{\partial}(fh_p))(z) = \\ &= P_{\rho, \alpha, \gamma}(fh_p)(z) + T_{\rho, \alpha, \gamma}(h_p \bar{\partial}f)(z) + T_{\rho, \alpha, \gamma}(f \bar{\partial}h_p)(z). \end{aligned} \quad (17)$$

Последовательность h_p ограничена и стремится к 1 во всех точках $z \in D^n$.

Поэтому

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(z)h_p(z) = f(z), \quad (18)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} P_{\rho, \alpha, \gamma}(fh_p)(z) = P_{\rho, \alpha, \gamma}(f)(z), \quad (19)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_{\rho, \alpha, \gamma}(h_p \bar{\partial} f)(z) = T_{\rho, \alpha, \gamma}(\bar{\partial} f)(z). \quad (20)$$

Для оценки $T_{\rho, \alpha, \gamma}(f \bar{\partial} h_p)$ заметим, что по построению $\bar{\partial} h_p$ отлично от нуля лишь на множестве

$$S_p = \bigcup_{k=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C}^n : 1 - \frac{3}{p} \leq |z_k| \leq 1 - \frac{1}{p} \right\} \bigcap D^n,$$

причем, как это следует из (16), на S_p имеет место неравенство

$$(1 - |\zeta_k|^{\rho_k}) |\bar{D}_k h_p(\zeta)| \leq \text{Const}.$$

В работе [5] получена асимптотика ядер Ψ_k : $\Psi_k = O((1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k + 1})$ при $|\zeta_k| \rightarrow 1$, $z_k \in D$ фиксировано. Учитывая все это, имеем

$$\begin{aligned} & |T_{\rho, \alpha, \gamma}(f \bar{\partial} h_p)(z)| \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi^n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} (n - k - 1)! \text{Const} \int_{S_p} |f(\zeta)| \sum_{m=1}^{n-k} |\bar{D}_{j_m} h_p(\zeta)| \cdot |\Psi_{j_1}| \dots \\ & \dots \Psi_{j_{n-k}} \prod_{m=1}^k (1 - |\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}})^{\alpha_{i_m}} |\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}} |\Phi_{i_m}| dV_{2n}(\zeta) \leq \\ & \leq \text{Const} \int_{S_p} |f(\zeta)| \prod_{k=1}^n (1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k} |\zeta_k|^{\gamma_k} dV_{2n}(\zeta). \end{aligned}$$

Последний интеграл стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$, т.к. $f \in L_{\rho, \alpha, \gamma}^1(D^n)$. Итак

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T_{\rho, \alpha, \gamma}(f \bar{\partial} h_p)(z) = 0. \quad (21)$$

Утверждение теоремы следует из (17) – (21).

Интегральное представление (6) – (8) является многомерным аналогом (5) и (2). В работе П. Шарпантье [7] установлен многомерный вариант формулы (2).

1.3. Пространство $L_{\rho, \alpha, \gamma}^2(D^n)$ является гильбертовым, если скалярное произведение в нем определить следующим образом :

$$\langle f, g \rangle_{\rho, \alpha, \gamma} = \int_{D^n} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} \prod_{k=1}^n (1 - |\zeta_k|^{\rho_k})^{\alpha_k} |\zeta_k|^{\gamma_k} dV_{2n}(\zeta). \quad (22)$$

Множество функций из $L_{\rho, \alpha, \gamma}^2(D^n)$, голоморфных в D^n , составляет замкнутое подпространство, которое обозначим через $H_{\rho, \alpha, \gamma}^2(D^n)$.

Теорема 2. Оператор $P_{\rho,\alpha,\gamma}$ является ортогональным проектором из $L^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ на $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$.

Доказательство. Прежде всего, если $f \in H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$, то $\bar{\partial}f = 0$, и, как следует из (6), $f(z) = P_{\rho,\alpha,\gamma}(f)(z)$. Пусть, далее, $V(z)$ принадлежит ортогональному дополнению $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$. Имеем

$$P_{\rho,\alpha,\gamma}(V)(z) = \frac{1}{\pi^n} \left\langle V(\zeta), \prod_{m=1}^n \overline{\Phi(z_m, \zeta_m)} \right\rangle_{\rho,\alpha,\gamma}. \quad (23)$$

Функция $\overline{\Phi(z, \zeta)}$ при фиксированном $z \in D$ голоморфна относительно ζ в D и непрерывна в \bar{D} (см. [5]). Поэтому $\prod_{m=1}^n \overline{\Phi(z_m, \zeta_m)}$ принадлежит $H^2_{\rho,\alpha,\gamma}(D^n)$ и, как следует из (22) и (23), $P_{\rho,\alpha,\gamma}(V) \equiv 0$. Это и доказывает теорему.

§2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{C}^n

2.1. В работе [5] построены ядра Φ^∞ и Ψ^∞ :

$$\Phi^\infty(z, \zeta) \equiv \Phi^\infty(z, \zeta; \rho, \sigma, \gamma) = \frac{\rho\sigma^\mu}{2} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} z \bar{\zeta}; \mu),$$

$$\Psi^\infty(z, \zeta) \equiv \Psi^\infty(z, \zeta; \rho, \sigma, \gamma) = 1 - \sigma^\mu \frac{\rho(\zeta - z)}{\zeta} \int_0^{|\zeta|} e^{-\sigma r^\rho} r^{\gamma+1} E_{\rho/2}(\sigma^{2/\rho} r^2 z / \zeta; \mu) dr,$$

где

$$\rho > 0, \quad \sigma > 0, \quad \gamma > -2, \quad \mu = \frac{2+\gamma}{\rho}. \quad (24)$$

Теорема В. (см. [5]). Пусть для гладкой на комплексной плоскости функции f при некотором $\varepsilon > 0$ выполняются следующие условия :

$$f(z) = O(e^{(1-\varepsilon)\sigma|z|^\rho}) \quad \text{и} \quad \bar{\partial}f(z) = O(e^{(1-\varepsilon)\sigma|z|^\rho}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Тогда имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\zeta|^\gamma e^{-\sigma|\zeta|^\rho} f(\zeta) \Phi^\infty(z, \zeta) dV_2(\zeta) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}f(\zeta) \Psi^\infty(z, \zeta) \frac{dV_2(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Доказательство этой теоремы основано на перечисляемых ниже свойствах а2) – г2) ядер Φ^∞ и Ψ^∞ , которые вполне аналогичны свойствам а1) – г1), соответствующим случаю круга в §1).

а2). При фиксированном $z \in D$ функция $\Psi^\infty(z, \zeta)$ является гладкой на $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяет равенству

$$\bar{D}_\zeta \Psi^\infty(z, \zeta) = (z - \zeta) |\zeta|^\gamma e^{-\sigma |\zeta|^\rho} \Phi^\infty(z, \zeta).$$

62). При $\zeta \rightarrow 0$ имеем

$$\Psi^\infty(z, \zeta) = \begin{cases} 1 + O(|\zeta|^{\gamma+1}) & \text{при } z \neq 0, \\ 1 + O(|\zeta|^{\gamma+2}) & \text{при } z = 0. \end{cases}$$

в2). Для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\Psi^\infty(z, \zeta) = O(e^{-(1-\varepsilon)\sigma|\zeta|^\rho})$, при $\zeta \rightarrow \infty$.

г2). $\Psi^\infty(z, z) = 1$, при $z \neq 0$ и $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi^\infty(0, \zeta) = 1$.

2.2. Для заданных наборов чисел $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, удовлетворяющих (24), обозначим через $L_{\rho, \sigma, \gamma}^p(\mathbf{C}^n)$ пространство измеримых в \mathbf{C}^n функций с конечной нормой

$$\left[\int_{\mathbf{C}^n} |f(\zeta)|^p \prod_{m=1}^n |\zeta_m|^{\gamma_m} e^{-\sigma_m |\zeta_m|^{\rho_m}} dV_{2n} \right]^{1/p},$$

а через $H_{\rho, \sigma, \gamma}^p(\mathbf{C}^n)$ – его замкнутое подпространство, состоящее из целых функций.

Теорема 3. Пусть f – гладкая в \mathbf{C}^n функция такая, что $f, \bar{D}_k f \in L_{\rho, \sigma, \gamma}^p(\mathbf{C}^n)$ ($k = 1, \dots, n$, $p > 1$). Тогда имеет место интегральное представление

$$f(z) = P_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(f)(z) + T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(\bar{\partial}f)(z), \quad (25)$$

где

$$P_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(f)(z) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbf{C}^n} f(\zeta) \prod_{m=1}^n |\zeta_m|^{\gamma_m} e^{-\sigma_m |\zeta_m|^{\rho_m}} \Phi_m^\infty(z_m, \zeta_m) dV_{2n}(\zeta), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(\bar{\partial}f)(z) &= \\ &= \frac{1}{\pi^n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{\mathbf{C}^n} \left[\sum_{m=1}^{n-k} (\bar{z}_{j_m} - \bar{\zeta}_{j_m}) \bar{D}_{j_m} f \right] \Psi^\infty(z_{j_1}, \zeta_{j_1}) \times \dots \\ &\dots \times \Psi^\infty(z_{j_{n-k}}, \zeta_{j_{n-k}}) \prod_{m=1}^k |\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}} e^{-\sigma_{i_m} |\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}}} \Phi^\infty(z_{i_m}, \zeta_{i_m}) \frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2k}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Доказательство. Возьмем гладкую на $[0, \infty)$ функцию $v(t)$, удовлетворяющую условию

$$v(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{при } 2 \leq t < \infty, \end{cases}$$

и построим последовательность функций

$$v_N(z) = v\left(\frac{|z_1|}{N}\right) \cdots v\left(\frac{|z_n|}{N}\right), \quad z \in \mathbf{C}^n, \quad N = 1, 2, \dots$$

Очевидно, $v_N(z) \equiv 1$ в полидиске $D_N^n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z_k| < N, k = 1, \dots, n\}$, и $v_N(z) \equiv 0$ вне полидиска D_{2N}^n . Далее, производные от $v_N(z)$ отличны от нуля лишь в “кольце” $D_{2N}^n \setminus D_N^n$ и, кроме того

$$|\operatorname{grad} v_N(z)| \leq \frac{1}{N} \operatorname{Const}.$$

Рассмотрим последовательность fv_N . Поскольку эти функции финитны, то формулы (25) – (27) для них доказываются с использованием свойств а2) – г2) так же, как теорема 1 доказывалась для гладкой в \overline{D}^n функции; только вместо единичного полидиска D^n нужно взять D_N^n , при этом ввиду финитности интегралы по границе D_N^n исчезают. Итак

$$\begin{aligned} f(z)v_N(z) &= P_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(fv_N)(z) + T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(\bar{\partial}(fv_N))(z) = \\ &= P_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(fv_N)(z) + T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(v_N \bar{\partial} f)(z) + T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(f \bar{\partial} v_N)(z). \end{aligned} \quad (28)$$

Введем для краткости обозначение

$$d\mu(\zeta) = \prod_{m=1}^n |\zeta_m|^{\gamma_m} e^{-\sigma_m |\zeta_m|^{\rho_m}} dV_{2n}(\zeta).$$

Имеем

$$\begin{aligned} |P_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(fv_N)(z) - P_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(f)(z)| &\leq \int_{\mathbf{C}^n} |f(\zeta)| \cdot |v_N(\zeta) - 1| \prod_{m=1}^n |\Phi^\infty(z_m, \zeta_m)| d\mu(\zeta) \leq \\ &\leq \int_{\mathbf{C}^n \setminus D_N^n} |f(\zeta)| \prod_{m=1}^n |\Phi^\infty(z_m, \zeta_m)| d\mu(\zeta). \end{aligned}$$

Из свойств функции типа Миттаг–Лефлера следует, что функция $\prod_{m=1}^n \Phi^\infty(z_m, \zeta_m)$ имеет по каждой переменной ζ_m порядок $\frac{1}{2}\rho_m$, поэтому она имеет конечную

$L^q(d\mu)$ -норму. По неравенству Гельдера правая часть последнего неравенства не превосходит следующей величины :

$$\left[\int_{\mathbb{C}^n \setminus D_N^n} |f(\zeta)|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{C}^n} \prod_{m=1}^n |\Phi^\infty(z_m, \zeta_m)|^q d\mu(\zeta) \right]^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Так как $f \in L^p(d\mu)$, то при $N \rightarrow \infty$

$$|P_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(fv_N)(z) - P_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(f)(z)| \leq \text{Const} \left[\int_{\mathbb{C}^n \setminus D_N^n} |f(\zeta)|^p d\mu \right]^{1/p} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & |T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(v_N \bar{\partial} f)(z) - T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(\bar{\partial} f)(z)| \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi^n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k-1)! \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{\mathbb{C}^n} \sum_{m=1}^{n-k} |\bar{z}_{j_m} - \bar{\zeta}_{j_m}| \cdot |v_N(\zeta) - 1| \times \\ & \times |\bar{D}_{j_m} f| \cdot |\Psi_{j_1}^\infty| \cdots |\Psi_{j_{n-k}}^\infty| \prod_{m=1}^k |\zeta_{i_m}|^{\gamma_{i_m}} e^{-\sigma_{i_m} |\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}}} \frac{dV_{2n}(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n-2k}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Оценим каждое слагаемое $J_{i_1, \dots, i_k, j_m}^N$ в (30), считая точку z фиксированной и N настолько большим, что $z \in D_N^n$. Очевидно

$$\frac{|\bar{z}_{j_m} - \bar{\zeta}_{j_m}|}{|\zeta - z|^{2n-2k}} \leq \text{Const}, \quad \text{при } \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus D_N^n.$$

Далее

$$|\Phi_{i_m}^\infty| \leq \text{Const} \exp[(1+\delta)\sigma_{i_m} |\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}}], \quad \text{при любом } \delta > 0,$$

$$|\Psi_{j_m}^\infty| \leq \text{Const} \exp[-(1-\varepsilon)\sigma_{j_m} |\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}].$$

Последнее неравенство следует из в2). Имеем

$$\begin{aligned} J_{i_1, \dots, i_k, j_m}^N & \leq \text{Const} \int_{\mathbb{C}^n \setminus D_N^n} |\bar{\partial} f| \left\{ \prod_{m=1}^{n-k} |\zeta_{j_m}|^{-\gamma_{j_m}} \exp[\varepsilon \sigma_{j_m} |\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}] \times \right. \\ & \times \left. \prod_{m=1}^k \exp \left[(1+\delta) \sigma_{i_m} |\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}} \right] \right\} d\mu(\zeta) \leq \\ & \leq \text{Const} \left[\int_{\mathbb{C}^n} |\bar{\partial} f|^p d\mu \right]^{1/p} \left[\int_{\mathbb{C}^n \setminus D^n} |Q|^q d\mu \right]^{1/q}, \end{aligned} \quad (31)$$

где через Q обозначено выражение в фигурных скобках. Далее

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n \setminus D^n} |Q|^q d\mu &= \int_{\mathbb{C}^n \setminus D_N^n} \prod_{m=1}^{n-k} |\zeta_{j_m}|^{-2\gamma_{j_m}} \exp[(q\varepsilon - 1)\sigma_{j_m}|\zeta_{j_m}|^{\rho_{j_m}}] \times \\ &\times \prod_{m=1}^k \exp \left[q(1+\delta)\sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\frac{1}{2}\rho_{i_m}} - \sigma_{i_m}|\zeta_{i_m}|^{\rho_{i_m}} \right] dV_{2n} < \text{Const.} \end{aligned} \quad (32)$$

Последнее неравенство следует из того, что ε можно взять столь малым, чтобы удовлетворялось неравенство $q\varepsilon - 1 < 0$. Из (30) – (32), с учетом того, что $\bar{\partial}f \in L^p(d\mu)$, следует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(v_N \bar{\partial}f)(z) = T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(\bar{\partial}f)(z). \quad (33)$$

Аналогичными рассуждениями получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} T_{\rho, \sigma, \gamma}^\infty(f \bar{\partial}v_N)(z) = 0. \quad (34)$$

Кроме того, очевидно

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(z)v_N(z) = f(z). \quad (35)$$

Утверждение теоремы 3 следует из (29), (33) – (35).

Формулы (25) – (27) приобретают особенно простой вид при выборе параметров $\rho_k = 2$, $\sigma_k = 1$, $\gamma_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$). В этом случае

$$\begin{aligned} \Phi^\infty(z, \zeta, 2, 1, 0) &= \exp(z\bar{\zeta}), \quad \Psi^\infty(z, \zeta, 2, 1, 0) = \exp[(z - \zeta)\bar{\zeta}], \\ P_{2,1,0}^\infty(f)(z) &= \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{C}^n} f(\zeta) \exp(\langle z - \zeta, \zeta \rangle) dV_{2n}(\zeta), \\ T_{2,1,0}^\infty(\bar{\partial}f)(z) &= \frac{(n-1)!}{\pi^n} \int_{\mathbb{C}^n} \langle \bar{\partial}f, z - \zeta \rangle \exp(\langle z - \zeta, \zeta \rangle) \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{1}{|z - \zeta|^{2n-2k}} \right] dV_{2n}(\zeta), \end{aligned}$$

где $\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^n a_k \bar{b}_k$.

Оператор $T_{2,1,0}^\infty$ встречается в работе [8] в связи с решением $\bar{\partial}$ -уравнения.

2.3. Пространство $L_{\rho, \sigma, \gamma}^2(\mathbb{C}^n)$ со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{\rho, \sigma, \gamma} = \int_{\mathbb{C}^n} f(\zeta) \overline{g(\zeta)} \prod_{m=1}^n |\zeta_m|^{\gamma_m} e^{-\sigma_m |\zeta_m|^{\rho_m}} dV_{2n}$$

является гильбертовым. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Оператор $P_{\rho, \sigma, \gamma}$ является ортогональным проектором из $L^2_{\rho, \sigma, \gamma}(\mathbb{C}^n)$ на $H^2_{\rho, \sigma, \gamma}(\mathbb{C}^n)$.

Замечание. От гладкости f можно отказаться, в этом случае производные $\overline{D}_k f$ в формулах (6) и (25) нужно понимать в смысле обобщенных функций.

ABSTRACT. In the paper a Cauchy–Green’s type formula is obtained for a class of functions $f(z)$ defined in the unit polydisc D^n . This formula separates from f its “analytical part”, which receives an operator interpretation. Similar results are obtained for functions defined in the space \mathbb{C}^n .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. L. Carleson, “The corona problem”, Lect. Notes Math., vol. 118, pp. 121 – 132, 1970.
2. А. Г. Витушкин, “Аналитическая емкость в задачах теории приближений”, Успехи Мат. Наук, т. 22, № 6, стр. 141 – 199, 1967.
3. Г. М. Хенкин, “Метод интегральных представлений в комплексном анализе”, Итоги Науки : Совр. Проб. Мат., ВИНИТИ, т. 7, стр. 23 – 124, 1985.
4. М. М. Джрабашян, “К проблеме представимости аналитических функций”, Сообщ. Инст. Мат. и Мех. АН АрмССР, т. 2, стр. 3 – 40, 1948.
5. М. М. Джрабашян, “Весовые интегральные представления гладких или голоморфных функций в единичном круге и в комплексной плоскости”, Изв. НАН Армении. Математика, т. 28, № 4, стр. 1 – 28, 1993.
6. Б. В. Шабат, Введение в Комплексный Анализ, т. 2, М., Наука, 1985.
7. Ph. Charpentier, “Formules explicites pour les solutions minimales de l’équation $\bar{\partial}u = f$ dans la boule et dans le polydisque de \mathbb{C}^n ”, Ann. Inst. Fourier, vol. 30, № 4, pp. 121 – 154, 1980.
8. B. Bendtsson, M. Andersson, “Henkin-Ramirez formulas with weight factors”, Ann. Inst. Fourier, vol. 32, № 3, pp. 91 – 110, 1982.

12 декабря 1995

Ереванский государственный университет