Известия НАН Армении, Математика, том 52, н. 6, 2017, стр. 35 – 47.

ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОЕКТОРЫ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГАРМОНИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

А. И. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: apetrosyan@ysu.am

Аннотация. В статье вводятся банаховы пространства гармонических функций $h_\infty(\varphi)$, $h_0(\varphi)$, и $h^1(\eta)$, заданных в единичном шаре в $\mathbb{R}^n$. Эти пространства зависят от весовой функции φ и весовой меры η. Для заданной функции φ из достаточно широкого класса решается задача двойственности, т.е. строятся меры η такие, что $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ и $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

MSC2010 number: 30H05, 46E15.

Ключевые слова: банахово пространство; гармонические функции; весовая функция; весовая мера; ограниченный проектор; двойственность.

1. Введение

Положительная, непрерывная и убывающая на $[0,1)$ функция φ называется весовой функцией, если $\lim\varphi(r) = 0$ при $r \to 1$. Конечная, положительная борелевская мера η на $[0,1)$ называется весовой мерой, если ее носитель не сосредоточен ни на каком подинтервале $[0,\rho)$, $0 < \rho < 1$.

Пусть $h_\infty(\varphi)$ — банахово пространство комплекснозначных функций u, гармонических в единичном круге, с нормой $\|u\|_\varphi = \sup\{u(z)\varphi(|z|)\colon\ |z| < 1\}$ и $h_0(\varphi)$ — замкнутое подпространство функций u, для которых $|u(z)| = o\big(1/\varphi(|z|)\big)$ при $|z| \to 1$.

В работе [1] показано, что $h_\infty(\varphi)$ изометрически изоморфно второму сопряженному пространству к $h_0(\varphi)$. В [2] была поставлена и решена задача двойственности: найти весовую меру η на $[0,1)$ такую, что

$$h^1(\eta) = \big\{v \in L^1(d\eta(r)\,d\theta)\colon\ v \text{ гармонично в } |z| < 1\big\}$$

является промежуточным сопряженным, т. е. $h^1(\eta) \sim h_0(\varphi)^*$ и $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$. В указанной работе [2] рассмотрен случай $n = 2$. Как известно, всякая гармоническая в единичном круге $|z| < 1$ функция h разлагается в ряд по степеням z и $\overline{z}$, так как вещественнозначная гармоническая функция является вещественной частью голоморфной функции. Это позволяет применять методы комплексного анализа.

Настоящая статья посвящена решению задачи двойственности для многомерного случая, а именно, для функций, гармонических в единичном шаре в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$. Многомерный случай имеет специфику в том смысле, что не приходится говорить о связи между гармоническими и голоморфными функциями, и вместо степеней z и $\overline{z}$ мы имеем дело со сферическими гармониками.

Ниже применяются следующие обозначения:
$\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство;
$B = \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ |x| < 1\}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$;
S — его граница, являющаяся единичной сферой;
σ — борелевская мера на S, инвариантная относительно вращений и нормированная условием $\sigma(S) = 1$;
$h(B)$ — линейное пространство всех комплекснозначных, гармонических в B функций.
Символы C, c всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно, различные в разных местах.

2. Пространства гармонических функций

Пусть $\varphi(r)$ — весовая функция и η — весовая мера. Продолжим φ в B, положив $\varphi(x) = \varphi(|x|)$. Для $u \in h(B)$ положим

$$\|u\|_\varphi = \sup\big\{|u(x)|\varphi(x)\colon\ x \in B\big\} = \sup\big\{M_\infty(u,r)\varphi(r)\colon\ r < 1\big\},$$

$$\|u\|_\eta = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)|\, d\eta(r) d\sigma(\zeta) = \int_0^1 M_1(u,r)\, d\eta(r),$$

где $\quad M_\infty(u,r) = \sup\{|u(x)\colon\ |x| = r\}, \quad M_1(u,r) = \int_S |u(r\zeta)|\ d\sigma(\zeta)$

Определим пространства гармонических функций:

$$h_\infty(\varphi) = \big\{u \in h(B)\colon\ \|u\|_\varphi < \infty\big\},$$
$$h_0(\varphi) = \big\{u \in h(B)\colon\ \lim_{r\to 1} M_\infty(u,r)\varphi(r) = 0\big\},$$
$$h^1(\eta) = \big\{u \in h(B)\colon\ \|u\|_\eta < \infty\big\}.$$

Очевидно, $h_0(\varphi) \subset h_\infty(\varphi)$, так что можно использовать норму $\|u\|_\varphi$ для $h_0(\varphi)$.

Следующие два предложения посвящены основным свойствам этих пространств.

Предложение 2.1. *Пусть h означает любое из трех введенных выше пространств. Тогда:*

(i) *если b — ограниченное подмножество h, то функции из b равномерно ограничены на каждом компактном подмножестве B;*
(ii) *сходящаяся в h последовательность сходится равномерно на компактных подмножествах B;*
(iii) *для любой точки $x \in B$ значение в x является ограниченным линейным функционалом на h;*
(iv) *h — банахово пространство;*
(v) *$h_0(\varphi)$ является замкнутым подпространством $h_\infty(\varphi)$.*

Доказательство. В [3, Предложение 2] для $u \in h^1(\eta)$ получено неравенство, имеющее в наших обозначениях вид

$$|u(x)| \le \frac{2^n}{(1-|x|)^{n-1}} \left(\int_{(1+|x|)/2}^1 |d\eta(t)|\right)^{-1} \|u\|_\eta, \qquad x \in B.$$

Отсюда для $u \in h^1(\eta)$ следуют (i) и (iii). Для $h_\infty(\varphi)$ и $h_0(\varphi)$ эти утверждения очевидны. Легко видеть, что (ii) следует из (i).

Докажем (iv). Очевидно, пространства h являются линейными нормированными, поэтому достаточно доказать их полноту. Докажем полноту $h^1(\eta)$. Пусть последовательность u_j фундаментальна в $h^1(\eta)$ и пусть K — компактное подмножество B. Из (ii) следует, что существует константа $C = C(K)$ такая, что

$$\max_{x\in K} |u(x)| \le C\|u\|_\eta$$

для всех $u \in h^1(\eta)$. Следовательно,

$$|u_j(x) - u_k(x)| \le C\|u_j - u_k\|_\eta$$

для любых $x \in K$ и j, k. Поскольку u_j фундаментальна в $h^1(\eta)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность u_j равномерно сходится к некоторой функции u, гармонической в B. Из фундаментальности u_j следует, что

$$\int_S \int_0^1 |u_j(r\zeta)|\, d\eta(r) d\sigma(\zeta) = \|u_j\|_\eta \le \|u_j - u_k\|_\eta + \|u_k\|_\eta \le C.$$

Из теоремы Фату следует, что

$$\|u\|_\eta = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)|\, d\eta(r) d\sigma(\zeta) \le C,$$

т. е. $u \in h^1(\eta)$.

Случай $h_\infty(\varphi)$ проще. Пусть $u_j \in h_\infty(\varphi)$. На компактном подмножестве K шара функция $\varphi(x)$ отграничена от нуля, поэтому

$$|u_j(x) - u_k(x)| \le C\varphi(x)|u_j(x) - u_k(x)| = C\|u_j - u_k\|_\varphi, \quad x \in K.$$

Если u_j фундаментальна в $h_\infty(\varphi)$, то отсюда следует, что на компактных подмножествах B последовательность u_j равномерно сходится к некоторой функции u, гармонической в B. Нетрудно видеть, что u_j сходится к u и в норме $h_\infty(\varphi)$. (v) следует из (iv). $\square$

Предложение 2.2. *Пусть* $u_\varrho(x) = u(\varrho x)$, $0 \le \varrho \le 1$.

(i) *Если* $u \in h^1(\eta)$ *или* $u \in h_0(\varphi)$, *то* $u_\varrho \to u$ *по норме, при* $\varrho \to 1$*;*
(ii) *если* $u \in h_\infty(\varphi)$, *то* $\|u_\varrho\|_\varphi \le \|u\|_\varphi$ *и* $u_\varrho \to u$ *поточечно в* B*;*
(iii) *гармонические полиномы плотны в* $h^1(\eta)$ *и в* $h_0(\varphi)$*;*
(iv) *каждая функция* $u \in h_\infty(\varphi)$ *является поточечным пределом некоторой ограниченной по норме последовательности гармонических полиномов.*

Доказательство. (i) Для $h_0(\varphi)$ это очевидно. Рассмотрим случай $h^1(\eta)$. Для любого числа $\delta \in (0,1)$ будем иметь

$$\begin{aligned}\|u_\varrho - u\|_\eta &= \int_0^1 \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)|\, d\sigma(\zeta)\, d\eta(r) \le \\ &\le \int_0^\delta \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)|\, d\sigma(\zeta)\, d\eta(r) + \\ &+ \int_\delta^1 \int_S \big(|u(\varrho r\zeta)| + |u(r\zeta)|\big)\, d\sigma(\zeta)\, d\eta(r). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ввиду того, что функция $|u|$ субгармонична, ее среднее по единичной сфере

$$m(\varrho) = \int_S |u(\varrho r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)$$

является неубывающей величиной от ϱ: $m(\varrho) \le m(1)$. Отсюда и из (2.1)

$$\|u_\varrho - u\|_\eta \le \int_0^\delta \int_S |u(\varrho r\zeta) - u(r\zeta)|\, d\sigma(\zeta)\, d\eta(r) + 2\int_\delta^1 \int_S |u(r\zeta)|\, d\sigma(\zeta)\, d\eta(r),$$

откуда видно, что выбрав число δ, а затем ϱ достаточно близкими к 1, правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой.

(ii) следует из принципа максимума и непрерывности. Как известно, функция u_ϱ, гармоническая в окрестности $\overline{B}$, равномерно на $\overline{B}$ приближается гармоническими полиномами. Используя этот факт, получаем (iii) и (iv). □

Отметим еще, что в [4] даны соответствующие свойства пространств голоморфных функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.

3. Воспроизводящее ядро

Рассмотрим сперва случай плоскости (т. е. $n = 2$). Если функция u гармонична в единичном круге B_2, то, как известно, она является вещественной частью голоморфной в B_2 функции f. Так как $u = (f + \overline{f})/2$, то из разложения в ряд Тейлора получаем разложение для u, имеющее вид

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}, \tag{3.1}$$

где $0 \le r < 1$. В многомерном случае (т. е. $n > 2$) такой связи между гармоническими и голоморфными функциями нет, но существует аналог разложения (3.1), в котором роль экспонент $e^{ik\theta}$ играют сферические гармоники. В связи с этим напомним некоторые факты из теории гармонических функций (см., например, [5]).

Через $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ обозначается множество всех комплекснозначных однородных гармонических полиномов степени k в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Сужение полинома из $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ на сферу S называется сферической гармоникой степени k. Множество всех сферических гармоник степени k обозначается через $\mathcal{H}_k(S)$.

Всякая сферическая гармоника $p \in \mathcal{H}_k(S)$ единственным образом продолжается до однородного гармонического полинома, который мы будем обозначать той же буквой p.

$\mathcal{H}_k(S)$ является конечномерным замкнутым подпространством гильбертова пространства $L^2(S)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_S u(\zeta)\overline{v(\zeta)}\, d\sigma(\zeta).$$

Пусть точка $\xi \in S$ фиксирована. Функционал $\Lambda \colon \mathcal{H}_k(S) \to \mathbb{C}$, определяемый как значение в точке ξ: $\Lambda(p) = p(\xi)$, очевидно, линеен. Из общей теории гильбертовых пространств следует, что существует элемент $Z_k(\cdot, \xi) \in \mathcal{H}_k(S)$ такой, что для всех $p \in \mathcal{H}_k(S)$

$$p(\xi) = \int_S p(\zeta) Z_k(\zeta, \xi)\, d\sigma(\zeta).$$

Функция Z_k называется зональной гармоникой порядка k с полюсом в точке ξ. Она вещественна и удовлетворяет условию $Z_k(\zeta, \xi) = Z_k(\xi, \zeta)$.

Пусть φ — весовая функция и η — весовая мера. Введем меру $d\mu = \varphi\, d\eta$ и меру $d\mu'$, определенную равенством

$$\int_0^1 f(r)\, d\mu'(r) = \int_0^1 f(r^2)\, d\mu(r), \quad f \in C[0,1]. \tag{3.2}$$

Очевидно, обе эти меры борелевские, конечные, положительные и их носители не сосредоточены ни на каком подинтервале $[0, \rho)$, $0 < \rho < 1$.

Ниже используется полярная форма точек $x, y \in \mathbb{R}^n$, т. е. $x = \rho\xi$, $y = r\zeta$, где ξ, $\zeta \in S$, $\rho > 0$, $r > 0$. Рассмотрим функцию

$$R_\mu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \rho^k r^k Z_k(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} Z_k(x, y), \tag{3.3}$$

где $t_k = \int_0^1 r^k\, d\mu'(r) = \int_0^1 r^{2k}\, d\mu(r)$. Во втором равенстве в (3.3) через $Z_k(x, y)$ обозначено продолжение $Z_k(\xi, \zeta)$ по каждой переменной со сферы на все пространство $\mathbb{R}^n$ как однородного гармонического полинома степени k, поэтому $\rho^k r^k Z_k(\xi, \zeta) = Z_k(x, y)$.

Мы будем пользоваться соотношением двойственности между $h_\infty(\varphi)$ и $h^1(\eta)$, которое задается билинейной формой:

$$\langle u, v\rangle = \int_S \int_0^1 u(r\zeta)\overline{v(r\zeta)}\varphi(r)\, d\eta(r)\, d\sigma(\zeta), \quad u \in h_\infty(\varphi), \ \ v \in h^1(\eta). \tag{3.4}$$

Следующее предложение утверждает, что $\langle u(\cdot), R_\mu(x, \cdot)\rangle = u(x)$ для всех $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$. В этом случае говорят, что функция $R_\mu(x, y)$ является воспроизводящим ядром для билинейной формы (3.4).

Предложение 3.1. a) *При фиксированной точке $x \in B$ функция $R_\mu(x, y)$ гармонична в шаре $\{y \colon |y| < |x|^{-1}\}$.*

b) *Функция $R_\mu(x, y)$ является воспроизводящим ядром для билинейной формы (3.4), т.е. для всех $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$*

$$\langle u(\cdot), R_\mu(x, \cdot)\rangle = u(x). \tag{3.5}$$

Доказательство. Как известно (см. [5, Theorem 5.33]),

$$|Z_k(\xi,\zeta)| \le d_k \le Ck^{n-2}, \quad \text{для всех} \quad \xi,\zeta \in S, \tag{3.6}$$

где d_k — размерность пространства $\mathcal{H}_k(S)$, C — абсолютная константа. Так как мера μ' не равна нулю ни в какой окрестности 1, то

$$t_k \ge \int_s^1 r^k d\mu'(r) \ge s^k \int_s^1 d\mu'(r), \quad k = 0,1,2,\dots,$$

откуда следует, что $t_k^{-1} = O(s^{-k})$, $k \to \infty$, для каждого $0 < s < 1$. Отсюда и из (3.6) следует, что ряд в правой части (3.3) сходится абсолютно и равномерно на множестве $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}\colon\ |x||y| \le q,\ 0 < q < 1\}$, откуда и следует утверждение a).

С учетом того, что $\varphi\, d\eta = d\mu$, из (3.4) следует, что (3.5) является интегральным представлением: для всякой функции $u \in h_\infty(\varphi)$ или $u \in h^1(\eta)$

$$u(x) = \int_S \int_0^1 u(r\zeta) R_\mu(x, r\zeta)\, d\mu(r)\, d\sigma(\zeta). \tag{3.7}$$

Имеем

$$\|u\|_\mu = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)|\, d\mu(r) d\sigma(\zeta) = \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)| \varphi(r)\, d\eta(r) d\sigma(\zeta),$$

откуда

$$\|u\|_\mu \le \|u\|_\varphi \int_0^1 d\eta(r) \le C\|u\|_\varphi \tag{3.8}$$

и

$$\|u\|_\mu \le \max \varphi(r) \int_S \int_0^1 |u(r\zeta)|\, d\eta(r)\, d\sigma(\zeta) \le C\|u\|_\eta. \tag{3.9}$$

Отсюда следует, что если $u \in h_\infty(\varphi) \cup h^1(\eta)$, то $u \in h^1(\mu)$. Для функций же из $h^1(\mu)$ (в несколько иных обозначениях) формула (3.7) доказана в [3, Theorem 1], откуда и следует утверждение b). □

Предложение 3.2. *Пусть $\mathfrak{L}(R_\mu(x,\cdot))$ — линейная оболочка множества функций $\{R_\mu(x,\cdot),\ x \in B\}$. Тогда $\mathfrak{L}(R_\mu(x,\cdot))$ плотна в $h^1(\eta)$ и в $h_0(\varphi)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $h^1(\eta)$, для $h_0(\varphi)$ доказательство аналогично. Согласно теореме Хана–Банаха, достаточно показать, что если $\Phi \in h^1(\eta)^*$ и $\Phi(R_\mu(x,\cdot)) = 0$ для всех $x \in B$, то Φ аннулирует все $h^1(\eta)$.

Так как $R_\mu(x,y)$ гармонична в $|y| < |x|^{-1}$, ряд (3.3) этой функции сходится в $\overline{B}$ равномерно и, следовательно, также и по норме $h^1(\eta)$. Поэтому

$$\Phi\big(R_\mu(x,\cdot)\big) = \sum_{k=0}^\infty t_k^{-1} \Phi\big(Z_k(x,\cdot)\big) \tag{3.10}$$

для всякой точки $x \in B$.

Пусть $\left\{e_1^{(k)}, \dots, e_{d_k}^{(k)}\right\}$ — ортонормальный базис в $\mathcal{H}_k(S)$. Тогда $Z_k(x,y) = \sum_{j=1}^{d_k} \bar{e}_j^{(k)}(x) e_j^{(k)}(y)$. Имеем

$$\Phi\big(Z_k(x,\cdot)\big) = \sum_{j=1}^{d_k} c_j^{(k)} \bar{e}_j^{(k)}(x), \tag{3.11}$$

где $c_j^{(k)} = \Phi(e_j^{(k)})$. Таким образом, $\Phi\big(Z_k(x,\cdot)\big) \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^n)$ и (3.10) является однородным разложением функции $\Phi\big(R_\mu(x,\cdot)\big)$ на однородные полиномы. Покажем, что из равенства $\Phi\big(R_\mu(x,\cdot)\big) = 0$ следует $\Phi\big(Z_k(x,\cdot)\big) = 0, \quad k = 0, 1, \dots$. Зафиксируем $\zeta \in S$ и рассмотрим сужение функции $\Phi\big(R_\mu(x,\cdot)\big)$ на прямую $x = r\zeta$, $0 \le r < 1$. Имеем

$$\Phi\big(R_\mu(r\zeta,\cdot)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \Phi\big(Z_k(r\zeta,\cdot)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^{-1} \Phi\big(Z_k(\zeta,\cdot)\big) r^k \equiv 0$$

для всех $0 \le r < 1$. По теореме единственности для коэффициентов степенного ряда одной переменной, $\Phi\big(Z_k(\zeta,\cdot)\big) = 0$ (т. к. $t_k^{-1} \neq 0$), $\quad k = 0, 1, \dots$. Отсюда и из (3.11)

$$\Phi\big(Z_k(\zeta,\cdot)\big) = \sum_{j=1}^{d_k} c_j^{(k)} \bar{e}_j^{(k)}(\zeta) = 0, \quad \zeta \in S, \quad k = 0, 1, \dots,$$

откуда в силу линейной независимости системы $\left\{\bar{e}_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{d_k}$ следует, что $c_j^{(k)} = 0$ $j = 1, \dots, d_k$ и для всех $k = 0, 1, \dots,$. Значит, Φ аннулирует все гармонические полиномы, так как всякий гармонический полином является конечной линейной комбинацией $e_j^{(k)}$. Согласно пункту (iii) Предложения 2.2, Φ аннулирует все пространство $h^1(\eta)$. $\square$

Для весовой меры η обозначим через $L^1(d\eta\, d\sigma)$ и $L^\infty(d\eta\, d\sigma)$ банаховы пространства комплексозначных функций в B, которые интегрируемы и, соответственно, существенно ограничены и измеримы относительно меры $d\eta\, d\sigma$. Норму в этих пространствах обозначим, соответственно, через $\|\cdot\|_\eta$ и $\|\cdot\|_\infty$. Пусть, далее $C_0(B)$ — банахово пространство комплексозначных непрерывных на $\overline{B}$ функций, обращающихся в нуль на S, с sup-нормой. Как известно, двойственным (сопряженным) к $C_0(B)$ является $M(B)$ — пространство комплексных конечных борелевских мер в B, с нормой полной вариации. Мы отождествляем $L^1(d\eta\, d\sigma)$ с абсолютно непрерывными относительно $d\eta\, d\sigma$ мерами.

Следующая теорема является основной.

Теорема 3.1. *Пусть φ — весовая функция, η — весовая мера и R_μ — соответствующее воспроизводящее ядро* (3.3). *Рассмотрим линейные интегральные операторы*

$$(Tf)(x) = \int_S \int_0^1 R_\mu(x, r\zeta) f(r\zeta)\, d\eta(r)\, d\sigma(\zeta) \qquad f \in L^\infty(d\eta\, d\sigma),$$

$$(S\nu)(x) = \int_B R_\mu(x,y)\varphi(y)\, d\nu(y) \qquad \nu \in M(B).$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) $\|R_\mu(x,\cdot)\|_\eta \le \dfrac{c}{\varphi(x)}, \quad x \in B.$

(ii) T *является ограниченным оператором из* $L^\infty(d\eta\, d\sigma)$ *в* $h_\infty(\varphi)$.

(iii) S *является ограниченным оператором из* $M(B)$ *в* $h^1(\eta)$.

(iv) $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$.

(v) $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

Доказательство. Непосредственно из определения оператора T следует, что из (i) вытекает (ii). В самом деле,

$$\begin{aligned}|(Tf)(x)| &\le \|f\|_\infty \int_S \int_0^1 |R_\mu(x,r\zeta)|\, d\eta(r)\, d\sigma(\zeta)\\ &= \|f\|_\infty \|R_\mu(x,\cdot)\|_\eta \le \|f\|_\infty \frac{c}{\varphi(x)},\end{aligned}$$

откуда следует, что $\|Tf\|_\varphi \le c\|f\|_\infty$.

Из теоремы Фубини следует, что из (i) вытекает также (iii). В самом деле,

$$\begin{aligned}\|S\nu\|_\eta &= \int_B \left|\int_B R_\mu(r\zeta,y)\varphi(y)\, d\nu(y)\right| d\eta(r)\, d\sigma(\zeta)\\ &\le \int_B \left(\int_B |R_\mu(r\zeta,y)| d\eta(r)\, d\sigma(\zeta)\right) \varphi(y)\, d|\nu|(y)\\ &\le \int_B \frac{c}{\varphi(y)}\varphi(y)\, d|\nu|(y) = c\,\|\nu\|.\end{aligned}$$

Докажем, что из (iii) следует (v). Условие (v) означает, что каждый элемент из $h^1(\eta)$ может быть отождествлен с линейным функционалом на $h_0(\varphi)$ посредством двойственного соотношения (3.4), а точнее, если для заданной функции $v \in h^1(\eta)$ определить функционал $l_v(u) = \langle u, v\rangle$, $u \in h_0(\varphi)$, то $l_v \in h_0(\varphi)^*$. Обратно, для каждого функционала $l \in h_0(\varphi)^*$ должна существовать единственная функция $v \in h^1(\eta)$ такая, что $l = l_v$. Кроме того, нормы $\|l_v\|$ и $\|v\|_\eta$ эквивалентны.

В самом деле, согласно неравенству Гельдера,

$$|l_v(u)| = |\langle u, v\rangle| \le \|v\|_\eta\, \|u\|_\varphi.$$

Таким образом, $l_v \in h_0(\varphi)^*$ и $\|l_v\| \le \|v\|_\eta$. Осталось доказать, что существует константа c такая, что всякий функционал $l \in h_0(\varphi)^*$ представляется в виде $l = l_v$, где $v \in h^1(\eta)$ и $\|v\|_\eta \le c\,\|l\|$.

Отождествляя $u \in h_0(\varphi)$ с функцией $u\varphi \in C_0(B)$, мы можем рассматривать $h_0(\varphi)$ как подпространство $C_0(B)$. Из теоремы Хана–Банаха следует, что существует мер $\nu \in M(B)$ такая, что $\|l\| = \|\nu\|$ и $l(u) = \int_B u(y)\varphi(y)\, d\nu(y)$. Таким образом,

$$l(R_\mu(x,\cdot)) = \int_B R_\mu(x,y)\varphi(y)\, d\nu(y) = (S\nu)(x).$$

Пусть $v = S\nu$. Согласно (iii), $v \in h^1(\eta)$ и $\|v\| \le \|S\|\,\|\nu\| = \|S\|\,\|l\|$. Далее, по Предложению 3.1, $l_v(R_\mu(x,\cdot)) = \langle R_\mu(x,\cdot), v\rangle = v(x) = (S\nu)(x) = l(R_\mu(x,\cdot))$. Таким образом, функционалы l и l_v совпадают на линейной оболочке $\mathfrak{L}(R_\mu(x,\cdot))$ множества функций $\{R_\mu(x,\cdot),\, x \in B\}$. По Предложению 3.2, $l = l_v$. Единственность следует также из Предложения 3.2, так как v определяется воспроизводящим ядром.

Аналогично доказывается, что из (ii) следует (iv). Только на этот раз нужно использовать двойственность пространств $L^1(d\eta\, d\sigma)$ и $L^\infty(d\eta\, d\sigma)$ вместо двойственности $C_0(B)$ и $M(B)$.

Пусть, далее, выполнено (iv). Применив теорему Хана–Банаха, будем иметь

$$\begin{aligned}\|R_\mu(x,\cdot)\|_\eta &\le c\,\sup\{|\langle u, R_\mu(x,\cdot)\rangle|\colon\ u\in h_\infty(\varphi),\ \|u\|_\varphi\le 1\}\\ &= c\,\sup\{|u(x)|\colon\ u\in h_\infty(\varphi),\ \|u\|_\varphi\le 1\}\le \frac{c}{\varphi(x)},\quad x\in B.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что из (v) следует (i). □

Непосредственно из определения воспроизводящего ядра следует, что если S ограничен, то он является ограниченным проектором из $M(B)$ на подпространство $h^1(\eta)$.

Рассмотрим оператор T. Если $u\in h_\infty(\varphi)$, то $T(u\varphi)=u$. Это следует из того, что ядро R_μ воспроизводящее. Предположим, что T ограничен. Тогда $\|u\|_\varphi\le \|T\|\,\|u\varphi\|_\infty$. Следовательно, $\varphi h_\infty(\varphi)$ можно рассматривать как замкнутое подпространство $L^\infty(d\eta\, d\sigma)$. Таким образом, если T ограничен, то оператор φT осуществляет ограниченное проектирование из $L^\infty(d\eta\, d\sigma)$ на подпространство $\varphi h_\infty(\varphi)$.

4. Двойственность

В этом разделе мы рассматриваем задачу двойственности для широкого класса весовых функций φ. Теорема 3.1, по существу, сводит задачу двойственности к оценке (i) воспроизводящего ядра, проверить которую легче, чем соотношения (iv) и (v).

Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывно дифференцируема, монотонно возрастает к $+\infty$ на $[0,\infty)$ и удовлетворяет следующим трем условиям:

I. $\Delta^p\left[\dfrac{1}{\psi(k)}\right]\ge 0,\ k,p=0,1,2,\ldots.$

II. Существуют $a>0$ и $t_0>0$ такие, что $\psi(t)/t^a\searrow 0$ для $t>t_0$, при $t\to\infty$.

III. Существует константа $c>0$ такая, что

$$|\Delta^2\psi(k)|\le -c\,\frac{\Delta^1\psi(k)}{k},\quad k=1,2,\ldots.$$

Здесь использовано стандартное обозначение разности порядка p

$$\Delta^p f(k)=\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}f(k+j).$$

Лемма 4.1. *[2, Лемма 1] Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывна, монотонно возрастает на $[0,\infty)$ и удовлетворяет условию II. Тогда существуют константы c, C такие, что для $0\le r<1$*

$$\frac{c}{1-r}\,\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)\le\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)r^k\le\frac{C}{1-r}\,\psi\left(\frac{1}{1-r}\right)$$

Лемма 4.2. *Пусть функция $\psi(t)$ положительна, непрерывна, монотонно возрастает на $[0,\infty)$ и удовлетворяет условиям II и III. Пусть*

$$R(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)Z_k(x,y).$$

Тогда

$$\int_S R(\rho\xi, r\zeta)\,d\sigma(\zeta)\le C\,\psi\left(\frac{1}{1-\rho r}\right).$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} R(\xi,r\zeta) &=\sum_{k=0}^{q}\psi(k)Z_k(\xi,r\zeta)=\sum_{k=0}^{q}\psi(k)r^kZ_k(\xi,\zeta)\\ &=\sum_{k=0}^{q-1}\big(\Delta^1\psi(k)r^k\big)D_k(\xi,\zeta)+\psi(q)r^qD_q(\xi,\zeta), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $D_k(\xi,\zeta)=\sum_{m=0}^{k}Z_m(\xi,\zeta)$.

Из (3.6) следует, что $|D_q(\xi,\zeta)|\le C(q+1)q^{n-2}$. С учетом этого неравенства и условия II, будем иметь

$$|\psi(q)r^qD_q(\xi,\zeta)|\le Cr^q(q+1)q^{a+n-2}.$$

Отсюда следует, что при $q\to\infty$ последний член в правой части (4.1) стремится к нулю и мы получаем

$$R(\xi,r\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\big(\Delta^1\psi(k)r^k\big)D_k(\xi,\zeta).$$

Еще раз применив преобразование Абеля, получим

$$R(\xi,r\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\big(\Delta^2\psi(k)r^k\big)(k+1)F_k(\xi,\zeta),$$

где $F_k(\xi,\zeta)=\displaystyle\sum_{m=0}^{k}D_m(\xi,\zeta)=\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)Z_m(\xi,\zeta)$. Используя тождество

$$\Delta^2(\psi(k)r^k)=\big[(1-r)^2\psi(k)+2r(1-r)\Delta^1\psi(k)+r^2\Delta^2\psi(k)\big]r^k,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} &|R(\xi,r\zeta)|\le(1-r)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\psi(k)r^kF_k(\xi,\zeta)+\\ &+2(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\big(-\Delta^1\psi(k)\big)r^{k+1}F_k(\xi,\zeta)+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\psi(k)r^{k+2}\right|F_k(\xi,\zeta). \end{aligned}$$

Далее, поскольку $Z_m(\xi,\cdot)$ является однородным гармоническим полиномом степени m, то имеем

$$\int_S Z_m(\xi,\zeta)\,d\sigma(\zeta)=Z_m(\xi,0)=\begin{cases}1, & \text{если } m=0,\\ 0, & \text{если } m\ge 1.\end{cases} \tag{4.2}$$

Учитывая, что $F_k(\xi,\zeta)=\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)Z_m(\xi,\zeta)$, из (4.2) получим

$$\int_S F_k(\xi,\zeta)\,d\sigma(\zeta)=k+1.$$

Поэтому

$$\int_S |R(\xi,r\zeta)|\,d\sigma(\zeta)\le(1-r)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\psi(k)r^k$$

$$+\,2(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\big(-\Delta^1\psi(k)\big)r^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\psi(k)r^{k+2}\right|. \tag{4.3}$$

Применяя Лемму 4.1 к функции $(x+1)\psi(x)$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\psi(k)r^k\le\frac{c}{(1-r)^2}\,\psi\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{4.4}$$

Для $n>x_0$ из II следует

$$\frac{\psi(n+\varepsilon)-\psi(n)}{(n+1)^a}-\frac{\psi(n)}{n^a}+\frac{\psi(n)}{(n+1)^a}\le 0.$$

Далее, $\psi(n+1)-\psi(n)\le\psi(n)\big[(1+1/n)^a-1\big]\le c\,\psi(n)/n$, т. е.

$$-\Delta^1\psi(n)\le c\,\frac{\psi(n)}{n},\quad n=1,2,3,\dots.$$

Отсюда и из Леммы 4.1

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\big(-\Delta^1\psi(k)\big)r^{k+1}\le\frac{c}{1-r}\,\psi\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{4.5}$$

Применяя условие III, затем суммируя по частям и еще раз применяя Лемму 4.1, будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta^2\psi(k)r^{k+2}\right|\le c\sum_{k=0}^{\infty}\big(\big(-\Delta^1\psi(k)\big)r^{k+2}$$

$$\le cr(1-r)\sum_{k=0}^{\infty}\psi(k)r^k-c\psi(0)r^2\le c\,\psi\left(\frac{1}{1-r}\right). \tag{4.6}$$

Из (4.3)–(4.6) следует

$$\int_S R(\xi,r\zeta)\,d\sigma(\zeta)\le C\,\psi\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Учитывая, что $R(\rho\xi,r\zeta)=R(\xi,\rho r\zeta)$, отсюда получаем утверждение леммы. □

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему о двойственности.

Теорема 4.1. *Пусть* φ *— весовая функция вида* $\varphi(r) = \dfrac{1}{\psi\big(1/(1-r)\big)}$, *где* $\psi(t)$ *положительна, непрерывно дифференцируема, монотонно возрастает к* ∞ *на* $[0,\infty)$ *и удовлетворяет условиям I, II и III. Тогда существует весовая мера такая, что* $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$ *и* $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ *относительно двойственного соотношения* (3.4).

Доказательство. Для каждого целого числа $m > 1$ построим весовую меру η_m, которая удовлетворяет заключению теоремы. Зафиксируем m и заметим, что вместе с ψ условиям I, II и III удовлетворяет также и ψ^m. Проверяется это элементарно. Из условия I следует, что существует положительная конечная борелевская мера μ'_m на $[0,1)$ такая, что

$$\psi(k)^{-m} = \int_0^1 r^k d\mu'_m(r), \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Для этого достаточно применить известный критерий разрешимости проблемы моментов Хаусдорфа для последовательности $f(k)$, а именно: $\Delta^p f(k) \ge 0$, $k,p = 0,1,2,\dots$ (см. [6, стр. 97, Теорема 2.6.4]). Заметим, что носитель μ'_m не сосредоточен ни на каком подинтервале $[0,\rho)$, $0<\rho<1$, так как в противном случае $\psi(k)^m$ имел бы экспоненциальный рост, что противоречило бы условию II. Определим μ_m согласно (3.2), т.е.

$$\int_0^1 f(r)\, d\mu'_m(r) = \int_0^1 f(r^2)\, d\mu_m(r), \quad f \in C[0,1],$$

и положим $d\eta_m(r) = \psi\big(1/(1-r)\big)\, d\mu_m(r)$. Для того, чтобы η_m была бы весовой мерой, остается показать, что она конечна. Из Предложения 3.1 следует, что воспроизводящее ядро, ассоциированное с φ и η_m, имеет вид

$$R_m(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k)^m Z_k(x,y).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно доказать оценку (i) Теоремы 3.1 для R_m, т. е.

$$\int_S \int_0^1 |R_m(x, r\zeta)|\, d\eta_m(r) d\sigma(\zeta) \le \frac{c}{\varphi(x)}, \qquad x \in B. \tag{4.7}$$

Более того, из (4.7) при $x=0$ следует, что мера $d\eta_m$ конечна.

Применение Леммы 4.2 для ψ^m сводит (4.7) к неравенству

$$\int_0^1 \psi\left(\frac{1}{1-\rho r}\right)^m d\eta_m(r) \le c\psi\left(\frac{1}{1-\rho}\right), \qquad 0 \le \rho < 1, \tag{4.8}$$

доказательство которого приведено в [2, Theorem 4]. □

В заключение приведем примеры функций $\psi(x)$, удовлетворяющих условиям Теоремы 4.1:

$$\psi(x) = (x+1)^\alpha, \quad \psi(x) = [\ln(x+2)]^\alpha, \quad \psi(x) = [\ln\ln(x+4)]^\alpha, \ \alpha > 0.$$

Заметим, что весовые функции $\varphi(x)$, которым здесь соответствуют $\psi(x) = [\ln(x+2)]^\alpha$ и $\psi(x) = [\ln\ln(x+4)]^\alpha$, не являются нормальными.

Abstract. The paper studies the Banach spaces $h_\infty(\varphi)$, $h_0(\varphi)$, and $h^1(\eta)$ of harmonic functions over the unit ball in $\mathbb{R}^n$. These spaces depend on a weight function φ and a weight measure η. For a given function φ from a sufficiently broad class of functions, we solve the duality problem. that is, we construct measures η such that $h^1(\eta)^* \sim h_\infty(\varphi)$ and $h_0(\varphi)^* \sim h^1(\eta)$.

Список литературы

[1] L. A. Rubel and A. L. Shields, “The second duals of certain spaces of analytic functions”, J. Austral. Math. Soc., **11**, 276 – 280 (1970).

[2] A. L. Shields, D. L. Williams, “Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions”, J. Reine Angew. Math., **299** – **300**, 256 – 279 (1978).

[3] A. I. Petrosyan, “On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of $\mathbf{R}^n$”, Complex Variables, **50**, no. 12, 953 – 966 (2005).

[4] А. И. Петросян, “Ограниченные проекторы в пространствах функций, голоморфных в единичном шаре”, Известия НАН Армении, Математика, **46**, но. 5, 53 – 64 (2011).

[5] Sheldon Axler, Paul Bourdon, Wade Ramey, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, New York, Inc. (2001).

[6] Н. И. Ахиезер, Классическая Проблема Моментов и Некоторые Вопросы Анализа, Связанные с Нею, Москва (1961).

Поступила 27 мая 2016