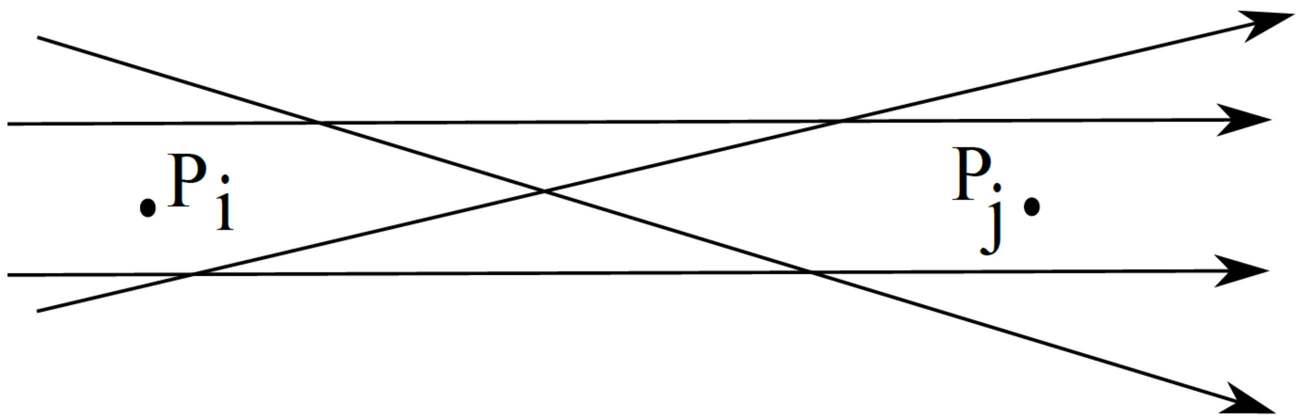
Р. В. Амбарцумян

ЛЕКЦИИ

ПО КОМБИНАТОРНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ



под редакцией Г. Ю. Паниной

2022-2023

Лекции по комбинаторной интегральной геометрии, Тетрадь 1

Введение

Курс настоящих лекций автор посвящает памяти своего отца, астрофизика Виктора Амазасповича Амбарцумяна, долгое время бессменного президента Академии Наук Армянской ССР. В 1965-70 гг. в Ереванском Институте Математики В.А. вел семинар, целью которого была передача его математического опыта молодежи. Руководитель семинара пропагандировал возможное применение *принципа инвариантности* в тематике интегральной геометрии.(В литературе термин "интегральная геометрия" впервые появился как заглавие монографии В. Бляшке [3].)

Свой принцип инвариантности В.А. Амбарцумян разработал в сороковые годы при решении задач теории переноса лучистого излучения. Этот термин по сей день хорощо известен специалистам. Часто используется равнозначный термин *инвариантное вложение* (invariant embedding), предложенный американским математиком Ричардом Беллманом. Уже первые шаги по применению инвариантного вложения в интегральной геометрии позволили вскрыть ряд ранее неизвестных фундаментальных фактов. В эпилоге к сборнику [4], говоря о принципе инвариантности, В.А. Амбарцумян пишет (перевод автора): "*... принципы инвариантности или инвариантное вложение нашли применение в такой чисто математической области как интегральная геометрия, в результате чего родилась ее новая, комбинаторная ветвь...*". С методом инвариантного вложения можно познакомиться в [26]. Однако настоящие лекции опираются на найденные позднее более наглядные прямые подходы к решению тех же комбинаторных задач.

Ниже дается обзор некоторых эпизодов из истории интегральной геометрии, связанных с тематикой настоящих лекций.

Задача Бюффона об игле

Идея введения меры в пространстве прямых содержится уже в классической задаче Бюффона о бросании иглы. Напомним формулировку этой знаменитой задачи (Франция, 1776 г.).

На поверхности пола имеется решетка параллельных прямых линий с единичным расстоянием между соседними линиями. На пол случайно бросается игла ν длины $|\nu| < 1$. Чему равна вероятность p того, что игла пересечет одну из начерченных на полу прямых линий? Если предположить, что проекция центра иглы на прямую, перпендикулярную параллельным прямым решетки, имеет равномерное распределение на интервале $(0, 1)$, а направление иглы не зависит от положения центра и распределено равномерно на $(0, \pi)$, то

$$p = \frac{2\,|\nu|}{\pi}.$$

Бюффон получил то же численное значение путем многократных бросаний иглы, так сказать, методом Монте-Карло.

Эквивалентной является следующая формулировка задачи, в которой игла и решетка прямых линий меняются ролями. Иглой будем называть всякий конечный прямолинейный отрезок ν на Евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Предположим, что игла $\nu \subset \mathbb{R}^2$ фиксирована, а случайным является положение решетки прямых.

Не нарушая общности можно полагать, что игла находится внутри круга $K \subset \mathbb{R}^2$ единичного диаметра. Тогда круг K пересекается лишь одной прямой решетки, скажем g_K. Так как остальные прямые решетки никакой роли не играют, задача Бюффона заменяется следующей: какова вероятность того, что случайная прямая g_K пересечет иглу ν? Понятно, что решение зависит от того, каким выбирается вероятностное распределение P случайной прямой g_K.

Существует вполне определенное, единственное распределение P, для которого вероятность пересечения иглы ν прямой g_K равно Бюффонову значению p для каждой иглы, лежащей внутри круга K. Это P пропорционально сужению так называемой *инвариантной меры* в пространстве прямых на множество

$$[K] = \text{прямые на плоскости } \mathbb{R}^2\text{, пересекающие круг } K.$$

Так задача Бюффона об игле оказывается связанной со следующим результатом настоящих лекций.

Пространство прямых принадлежащих евклидовой плоскости обозначим через G. Локально-конечная мера μ на G инвариантная относительно группы евклидовых движений плоскости (т. н. "инвариантная мера") единственным образом определяется посредством требования: для каждой иглы $\nu \subset \mathbb{R}^2$

$$\mu([\nu]) = 2\,|\nu|,$$

где $[\nu] \subset G$ = множество прямых, разделяющих концы иглы ν, $|\nu|$ – евклидова длина ν.

Задача Бюффона-Сильвестра

В 1890 английский математик Дж.Сильвестр рассмотрел [5] следующее прямое обобщение задачи Бюффона. Пусть на плоскости зафиксированы n игл $\nu_1,...,\nu_n$ в общем положении. Сильвестр показал, что значения инвариантной меры на подмножествах G вида

$$B = \bigcap_{i=1}^{n} [\nu_i] \quad \text{или} \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} [\nu_i]$$

допускают представление

$$\mu(B) = \sum_{i<j} u_{ij}(B)\, |P_i, P_j|, \tag{1}$$

где сумма распространяется на все пары концов игл $\nu_1,...,\nu_n$, а $u_{ij}(B)$ – целочисленные коэффициенты. Сильвестр поставил вопрос об алгоритме вычисления коэффициентов $u_{ij}(B)$ (так называемая *задача Бюффона–Сильвестра*). Та же задача, где иглы заменены выпуклыми контурами, ставилась в книге В. Бляшке [3]. Подробно рассмотрев решение, данное Крофтоном для случая двух выпуклых контуров, В.Бляшке пишет: "Случай трех и большего числа выпуклых контуров рассматривался предшественником Крофтона на кафедре Военной Академии в Вульвиче, Дж. Дж. Сильвестром [5]. При этом уже для трех контуров приходится рассматривать множество разных случаев" . Отметим, что М.В. Крофтон, автор статьи "Вероятность" в Британской энциклопедии [6], определившей на несколько десятилетий европейскую матматическую моду на т.н. *геометрические вероятности* .

В 1973 решение *задачи Бюффона–Сильвестра* было найдено для множеств B из класса т.н. Бюффоновых подмножеств пространства G, [9], [10]. Как оказалось, это решение стояло у начала теории, получившей название Комбинаторной Интегральной Геометрии.

Изопериметрическая программа В. Бляшке

В своих "Лекциях по Интегральной Геометрии" [3] В.Бляшке пишет, что он разрабатывал Интегральную Геометрию ради продвижений в вопросах изопериметрии. Цитируем (перевод автора):

"*Я отложил публикацию настоящей Второй Тетради на несколько месяцев в надежде доказать Изопериметрическое неравенство Шварца между объемом V и поверхностью O выпуклого тела*

$$O^3 - 36\pi V^2 \geq 0$$

тем же путем, как Сантало обосновал соответствующую формулу для плоскости

$$L^2 - 4\pi F \geq 0.$$ "

Вероятно, можно говорить об *изопериметрической программе В. Бляшке*. Ряд результатов комбинаторной интегральной геометрии в направлении этой программы можно найти в [1]. Так в [1] была получена изопериметрическая теорема для дискоидов об экстремальном свойстве полусферы в этом классе поверхностей.

Комбинаторная Интегральная Геометрия

В 1982 году в Англии была опубликована книга [1], давшая название дисциплине комбинаторной интегральной геометрии. Приведем выдержки из рецензии американского математика Р.Александера [2] на эту книгу.

...a base camp in a little explored area of geometry.... From here a number of interesting problems can be seen from a new perspective. With luck a boom town could arise. ... a significant contribution to the foundations of integral geometry. [2]

Авторский перевод: "*...базовый лагерь в мало исследованной области геометрии. Отсюда ряд интересных задач видятся в новой перспективе. Вероятно возникновение бума (исследований)....существенный вклад в основания интегральний геометрии*".

Настоящие лекции выборочно представляют материал этой книги, пополненный результатами последующих исследований.

Вклад Кембриджской школы

Значительным событием в развитии комбинаторной интегральной геометрии был Севанский Симпозиум (1976 г.) посвященный двухсотлетию задачи Бюффона об игле. Помимо Армянской Академии Наук, в его проведении принимали участие Лондонское Математическое Общество, британское Королевскпое Общество и французская Академи де Сьянс. Появились публикации сборника Академии Наук Армянской ССР [15] и монографии [1]. Последняя, в частности, содержит Аппендикс кембриджского математика А.Баддли. Отметим, что А. Баддли свои первые результаты по комбинаторной интегральной геометрии опубликовал в

1980 г. в сборнике [15]. Здесь он предложил свой подход к результатам, уже полученным методом инвариантного вложения. Дальнейшие его результаты (в [16] и Аппендиксе к [1]), касались в основном комбинаторики в многомерных пространствах (ниже мы их подробно не обсуждаем).

Четвертая проблема Гильберта

Комбинаторная интегральная геометрия тесно связана с четвертой проблемой Гильберта. На связь между непрерывными линейно-аддитивными псевдометриками на плоскости и мерами в пространстве прямых Р.В. Амбарцумян указывал еще в 1976 г. в [18] на базе результатов [9], [10]. Хотя связь с четвёртой проблемой Гильберта отмечалась А. Баддли в Аппендиксе к [1], потребовалось еще несколько лет для окончателного признания ее как решения знаменитой задачи, см. [19], [20], [21], [22].

Настоящие лекции существенно дополняют материал книги [1] новыми фактами, относящимися к этой проблеме.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology (with an Appendix by A.J.Baddeley), John Wiley & Sons, Chichester, 1982.

[2] R. Alexander, Book review on [1], Bulletin (New Series) of the American Math. Society, Volume 10, Number 2, 1984.

[3] W. Blaschke, Vorlesungen ueber Integralgeometrie, Chelsea, New York, 1949.

[4] A life in Astrophysics, Selected Papers of Victor A. Ambartsumian, Edited by Rouben V. Ambartzumian, with an introduction by Geoffrey Burbidge, Allerton Press, New York, 1998.

[5] J. J. Sylvester, “On a funicular Solution of Buffons problem of the needle”, Acta Mathematica vol. 14, pp. 185-205, 1890-91.

[6] M. W. Crofton, “Probability”, Encyclpaedia Britannica, IX edition, vol.XXI, 1885.

[7] Stochastic Geometry, edited by E.F. Harding and D.G. Kendall, John Wiley and Sons, Chichester, 1974.

[8] R. V. Ambartzumian, “Convex polygons and random Tessellations” in [7]

[9] R. V. Ambartzumian, “The solution to the Buffon-Sylvester problem in R^3”, Z.Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb., vol. 27, pp. 53-74, 1973.

[10] R. V. Ambartzumian, “Combinatorial Solution to the Buffon-Sylvester Problem”, Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 29, pp. 25-31, 1974.

[11] Р. В. Амбарцумян, “Метод инвариантного вложения в теории случайных прямых”, Известия АН Арм. ССР, Математика. Т.5(3), 167-206, 1970.

[12] R. V. Ambartzumian, “Probability Distribution in the Geometry of clusters”, Studia. Sci. Math. Hungar., vol. 6, pp. 235-241, 1971.

[13] R. V. Ambartzumian, “Stochastic Geometry from the standpoint of integral geometry”, Adv. Appl. Prob., vol. 9, pp. 792-823, 1977.

[14] Комбинаторные Принципы В Стохастической Геометрии. Сборник под редакцией Р.В.Амбарцумяна, Издателиство АН Армянской ССР, Ереван-1980.

[15] A. Baddeley, “Dissecting the Needle Problem”, in [14].

[16] A. Baddeley, “Combinatorial Foundations of Stochastic Geometry”, Proc. London Math. Soc., XLII, 151-177 (Received 17 July 1978), 1980.

[17] R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[18] R. V. Ambartzumian, “A Note on Pseudo-Metrics on the Plane”, Zeitschrift Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, vol. 37, pp. 145-155, 1976.

[19] Z. I. Szabo, “Hilbert’s Fourth Problem I”, Advances in Mathematics, Volume 59, 185-301, 1986.

[20] J. C. Alvarez Paiva, “Hilbert’s Fourth Problem in Two Dimensions”, Mass Selecta: Teaching and Learning Advanced Undergraduate Mathematics., S. Katok, A. Sossinsky, and S. Tabachnikov (eds.), Amer. Math. Soc., Rhode Island, 165–183, 2003.

[21] R. Schneider, “Crofton Measures in Projective Finsler spaces”, Proc. Wuhan, August 4, 2005.

[22] A. Papadopoulos, Hilbert’s fourth problem. Handbook of Hilbert geometry (A. Papadopoulos and M. Troyanov, ed.). IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics.

[23] А. В. Погорелов, Четветая Проблема Гильберта, Издательство НАУКА, Москва, 1974.

[24] R. Alexander, "Planes for which the lines are the shortest paths between points", Illinoice J. Math., vol. 22, pp. 177-190, 1978.

[25] R. V. Ambartzumian, "Remarks on Combinatorics of Planes in Euclidean Three Dimensions", SOP Transactions on Applied Mathematics, pp.29-43, 2014-07-30.

[26] R. V. Ambartzumian, "Invariant Imbedding in Stochastic Geometry", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, National Academy of Sciences of Armenia, Volume 34, No. 4, pp. 2-14, 1998.

[27] R. V. Ambartzumian, "Sevan Methodologies revisited: Random line processes", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, National Academy of Sciences of Armenia, Volume 48, No. 1, pp. 4-22, 2013.

[28] R. V. Ambartzumian, "Parallel X-ray Tomography of Convex Domains as a Search Problem in Two Dimensions", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, National Academy of Sciences of Armenia, Volume 48, No. 1, pp. 23-34, 2013.

Лекция 1. Координаты и инвариантные меры в пространствах прямых и плоскостей

1 Координаты прямых на плоскости

Пространство прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$ будем обозначать через G. Прямую $g \in G$ параметризуем парой координат (p, φ), $p \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, то есть полярными координатами основания перпендикуляра, опущенного на прямую g из начала координат O, см. рис. 1. Обычно (p, φ) называются *нормальными координатами* прямой. Заметим, что для прямых, проходящих через начало O, координата φ определена неоднозначно.

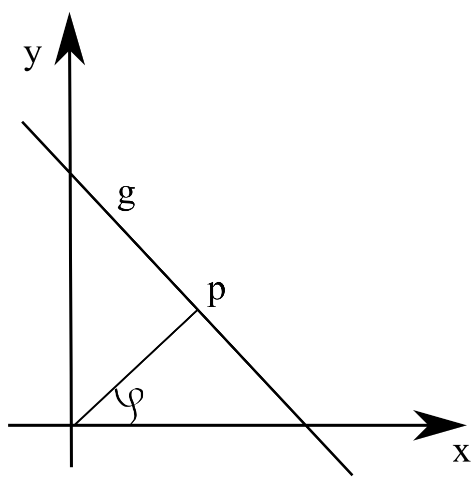


Рис. 1: Нормальные координаты

Рассматривается также пространство $\overline{G}$ всех направленных прямых на плоскости $\mathbb{R}^2$. Стандартными координатами на $\overline{G}$ служат аналогичные координаты (p, φ), но теперь область их изменения шире: $-\infty < p < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Условимся, что "ось p", перпендикулярная прямой $g \in \overline{G}$, всегда направлена в правую (относительно g) полуплоскость.

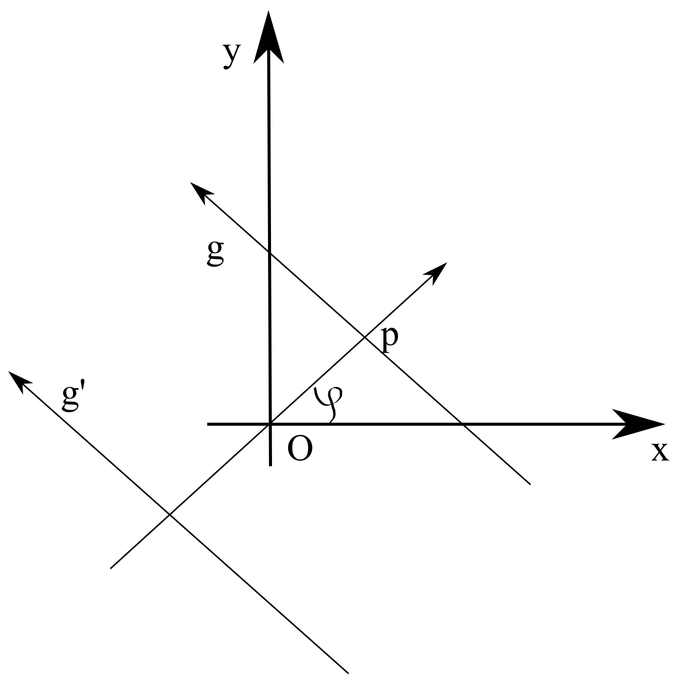


Рис. 2: Координаты направленной прямой

На рис. 2 изображена прямая g', параллельная g и лежащая на том же расстоянии от O, что и g, но оставляющая O справа. Для неё всегда выполнено

$$p(g') = -p(g).$$

1.1 Цилиндрическая модель пространства $\overline{G}$

Пространство $\overline{G}$ отобразим взаимно-однозначно на (бесконечный в две стороны) круговой цилиндр $C = [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Точке на цилиндре с обычными координатами (p, φ) ставим в соответствие $g \in \overline{G}$ с теми же нормальными координатами. При этом отображении топология цилиндра порождает некоторую топологию на $\overline{G}$. Она и имеется ввиду, когда говорим о пространстве $\overline{G}$.

Топология на G получается отображением $\overline{G} \mapsto G$, носящим название *операция стирания стрелок*. Таким образом, G отождествляется с многообразием, получающимся из полубесконечного кругового цилиндра $p \geq 0$ склеиванием диаметрально-противоположных точек его края. Можно проверить, что на G так появляется топология листа Мебиуса.

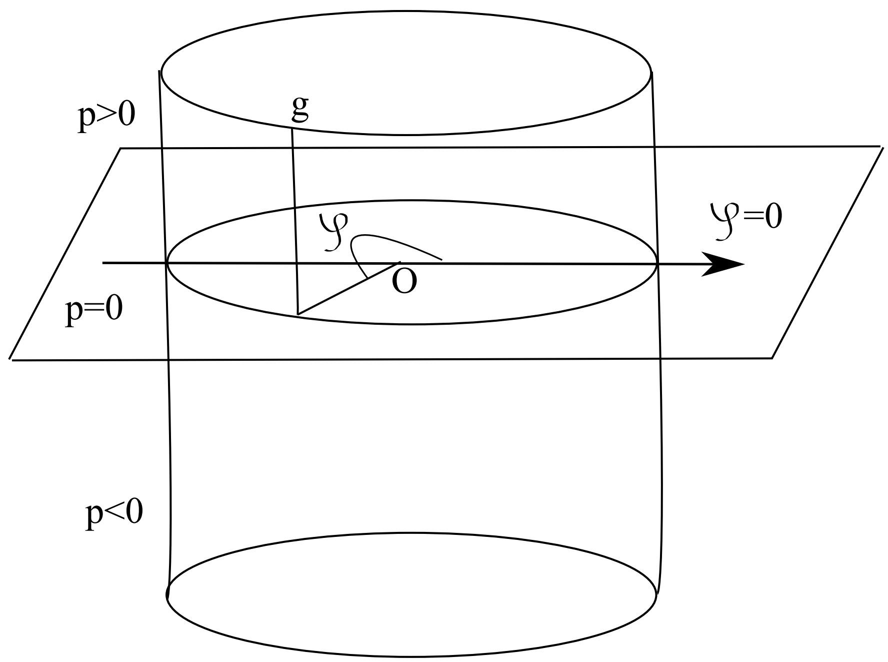


Рис. 3: Цилиндрическая модель

1.2 Инвариантные меры на $\overline{G}$ и G

На классе борелевских подмножеств $\overline{G}$ рассмотрим меру μ с элементом

$$dg = dp\, d\varphi. \tag{1.1}$$

то есть, меру, соответствующую площади на цилиндре. Это единственная (с точностью до постоянного множителя) мера на $\overline{G}$, обладающая свойством инвариантности относительно группы $\mathbf{M}$ евклидовых движений плоскости $\mathbb{R}^2$. Итак, для любого $B \subset \overline{G}$ и любого движения $M \in \mathbf{M}$,

$$\mu(B) = \int_B dg = \int_{MB} dg = \mu(MB), \quad MB = \{Mg : g \in B\},$$

где Mg – образ $g \in \overline{G}$ при движении M.

Последнее равенство можно вывести из элементарного принципа Кавальери, применимого благодаря тому, что преобразования цилиндра, индуцированные группой $\mathbf{M}$, переводят образующие цилиндра снова в образующие, причем расстояния на образующих сохраняются. Вопрос о координате φ сводится к обычному вращению вокруг оси цилиндра.

На пространстве $\overline{G}$ задаются и другие системы координат:

Пример 1.1 *Пусть x – абсцисса точки пересечения прямой g с осью OX на плоскости, и ψ – угол между g и осью OX.*

В координатах x, ψ инвариантная мера на $\overline{G}$ записывается так:

$$dg = |\sin\psi| \ dx \, d\psi, \tag{1.2}$$

(получается из (1.1) вычислением Якобиана).

Отметим, что здесь для прямых, параллельных оси OX, не определена координата x. Однако мера множества таких прямых равна нулю, и, следовательно, не влияет на значение интеграла.

Такой эффект (координатизировать удаётся не всё пространство) будет наблюдаться в дальнейшем многократно.

Пример 1.2 *Пусть на плоскости имеем две прямые оси g_1, g_2, и пусть l_1, l_2 – одномерные координаты точек на g_1, g_2. Каждой паре значений (l_1, l_2) соответствует прямая g, проходящая через эти точки. Вычисляя Якобиан, получаем выражение для меры dg в координатах (l_1, l_2):*

$$dg = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\rho} \, dl_1 \, dl_2, \tag{1.3}$$

где $\rho = |l_1, l_2|$ – длина отрезка l_1, l_2, а α_1 и α_2 – углы между g и прямыми g_1 и g_2 соответственно.

В пространстве G тоже имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная относительно группы $\mathbf{M}$. Для неё мы сохраняем оба обозначения, μ и dg.

В пространстве G сохраняются также выражения (1.1), (1.2) и (1.3). Разумеется, при интегрировании следует учитывать, что области изменения координат для $g \in G$ и $g \in \overline{G}$ различны.

Принцип удвоения интеграла. Для $g \in G$ обозначим через $g' \in \overline{G}$ и $g'' \in \overline{G}$ две прямые, получаемые из g заданием стрелки на g двумя возможными способами. Пусть $F(g)$ – некоторая функция, определенная на G. Определим на $\overline{G}$ функцию $f(g)$, полагая

$$f(g') = f(g'') = F(g).$$

Всегда имеем

$$\int_{\overline{G}} f(g) dg = 2 \int_G F(g) dg.$$

2 Примеры интегрирования в G

2.1 Мера прямых, пересекающих выпуклую область

Пусть a – прямолинейный отрезок на плоскости длины $|a|$. Обозначим

$$[a] = \{g \in G : g \text{ пересекает отрезок } a\}.$$

Индикаторная функция множества $[a]$ определяется как

$$I_{[a]}(g) = \begin{cases} 1, & \text{если } g \text{ пересекает отрезок } a; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

С помощью (1.2), находим

$$\mu([a]) = \int_G I_{[a]}(g)\, dg = \int_0^{|a|} dx \int_0^{\pi} \sin\psi\, d\psi = 2|a|.$$

Пусть $\mathcal{L}$ – ломаная линия на плоскости конечной длины L, a_i – ее звенья (прямолинейные отрезки длины $|a_i|$). Для каждого звена a_i запишем

$$\int_G I_{[a_i]}(g)\, dg = 2|a_i|.$$

Суммируя по всем звеньям ломаной $\mathcal{L}$, получим

$$\int_G N(g)\, dg = 2L.$$

где $N(g)$ – число пересечений прамой g с ломаной $\mathcal{L}$. Этот результат буквально переносится на случай, когда $\mathcal{L}$ – произвольная кривая конечной длины L.

Предположим, что $\mathcal{L}$ есть граница выпуклой области D. Через $[D]$ обозначим множество прямых пересекающих область D. Поскольку для (почти) всех $g \in [D]$ имеем $N(g) = 2$, после сокращения на 2, получаем:

$$\mu([D]) = \int_{[D]} dg = |\partial D|,$$

где $|\partial D|$ – периметр области D.

Вычисление того же интеграла в координатах φ, p дает

$$\int_{[D]} dg = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dp = \int_0^{\pi} b(\varphi) d\varphi,$$

где $b(\varphi)$ – ширина области D в направлении перпендикулярном φ.

Мы получили *теорему об интеграле ширины*:

$$\int_0^\pi b(\varphi)d\varphi = |\partial D|.$$

Рассмотрим интеграл от длины хорды выпуклой области D, т.е.

$$\int_{[D]} \chi(g)\, dg,$$

где $\chi(g)$ – длина хорды $g \cap D$.

Решим эту задачу для пространства $\overline{G}$, используя координаты (p, φ). При любом выборе начала O и нулевого направления имеем

$$\int_{\overline{G}} \chi(g)\, dg = \int_{\overline{G}} \chi(g)\, dp\, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{p_1}^{p_2} \chi(g)\, dp,$$

где значения p_1, p_2 соответствуют двум опорным прямым при данном φ. Так как $\chi\, dp$ есть элемент площади, то внутренний интеграл при любом φ равен площади области D, последнюю обозначим через $S(D)$. Следовательно,

$$\int_{\overline{G}} \chi(g)\, dg \;=\; 2\pi\, S(D).$$

Из принципа удвоения интеграла следует, что

$$\int_G \chi(g)\, dg \;=\; \pi(D)S.$$

2.2 Направленные хорды выпуклой области

Пусть D – ограниченая выпуклая область на плоскости с достаточно гладкой границей ∂D. *Направленной хордой* ν области D называется обычная прямолинейная хорда, снабженная стрелкой. Направленной хорде ν соответствует содержащая ее направленная прямая $g \in \overline{G}$: полагаем, что g принимает стрелку от ν; пишем $\nu = D \cap g$. Направленную хорду ν определяет ее начало $l \in \partial D$ (точка входа g в D) и угол ψ между ν и касательной к ∂D в точке l. Будем рассматривать l как числовую координату на ∂D, т.е. $0 < l \leq H$, где H – периметр области D.

Пространство направленных хорд для D обозначим через $\overline{[D]}$. На $\overline{[D]}$ имеется мера

$$d\nu \;= \sin\psi\ dl\ d\psi.$$

Имеет место теорема о совпадении мер: $d\nu$ есть сужение на множество $\overline{[D]}$ определенной на $\overline{G}$ меры dg, т.е.,

$$d\nu = I_{\overline{[D]}}\, dg,$$

где

$$I_{[D]}(g) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad D \cap g \neq \emptyset; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3 Инвариантная мера в пространстве направлений в $\mathbb{R}^3$

Как и в $\mathbb{R}^2$, направления в $\mathbb{R}^3$ бывают двух видов: направления со стрелкой и направления без стрелки.

Пространство $\overline{S}_2$ направлений со стрелкой есть сфера единичного радиуса (здесь индекс 2 указывает на размерность). Стандартными координатами точки $\omega \in \overline{S}_2$ являются (географические) широта ψ и долгота ϕ.

ψ – угловое расстояние точки ω от северного полюса N, $0 \leq \psi < \pi$.

ϕ – угол поворота плоскости, содержащей оба полюса и ω, измеряемый от нулевого (в географии – Гринвичского) меридиана $0 \leq \phi < 2\pi$. Заметим, что на полюсах угол ϕ определен неоднозначно.

Пространство S_2 направлений без стрелки есть проективная плоскость. Пространство S_2 получается отождествлением пар диаметрально противоположных точек на $\overline{S}_2$. Пространство S_2 удовлеворяет стандартным аксиомам плоскости если в качестве прямымых здесь берутся большие полукруги со склеенными концами (топологические окружности). Отметим, что на проективной плоскости каждая пара прямых пересекается в единственной точке. Построение S_2 путем выбрасывания открытой (скажем, южной) полусферы из $\overline{S}_2$ и склеивания диаметрально противоположных точек на экваторе оставшейся (северной) полусферы дает тот же результат. Об S_2 иногда говорят, как о пространстве диаметров сферы $\overline{S}_2$.

Инвариантная (относительно группы вращений вокруг центра) мера на единичной сфере $\overline{S}_2$ записывается как

$$d\omega = \sin\psi \; d\psi \; d\phi,$$

(это хорошо известный вид элемента площади на единичной сфере).

Вычислим значения этой меры для т.н. *лунок* и сферических треугольников (см. рис. 4). Пусть L – лунка на S_2. Можно считать, что вершина L совпадает с северным полюсом. Для каждого значения ϕ имеем

$$\int_0^\pi \sin\psi \, d\psi = 2.$$

Интегрированием по $d\phi$ получаем

$$\int_L d\omega = 2\alpha,$$

где α – раствор лунки (внутренний угол при вершине лунки). Итак для площади $S(L)$ лунки всегда имеем

$$S(L) = 2\alpha.$$

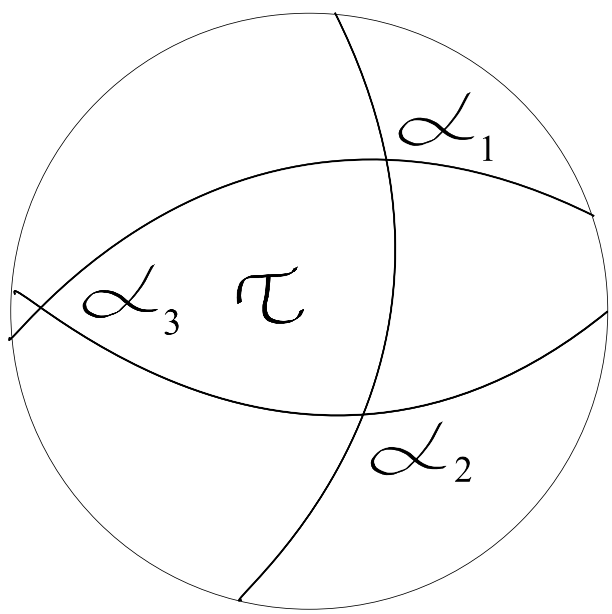


Рис. 4: Лунки L_1, L_2, L_3 в проекции на экваториальную плоскость

Пусть τ – треугольник на S_2 (на единичной полусфере), L_1, L_2, L_3 - его внутренние лунки. Плошадь полусферы равна 2π, поэтому из рис.4 заключаем

$$S(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = 2\pi.$$

Кроме того

$$S(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = S(\tau).$$

а также

$$S(L_1 \cap L_2) = S(L_1 \cap L_3) = S(L_2 \cap L_3) = S(\tau).$$

По формуле включения-исключения,

$$S(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = S(L_1) + S(L_2) + S(L_3) -$$

$$-S(L_1 \cap L_2) - S(L_1 \cap L_3) - S(L_2 \cap L_3) + S(L_1 \cap L_2 \cap L_3).$$

Так как $S(L_i) = 2\alpha_i$, в результате получается знаменитая формула Эйлера

$$S(\tau) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi.$$

Словами: *на сфере единичного радиуса площадь сферического треугольника равна сумме его внутренних углов минус* π.

Для $\omega \in S_2$ через ψ обозначим угловое расстояние между северным полюсом N и ω. Ниже особое значение будет иметь равенство

$$\int_{S_2} \cos\psi \, d\omega = \pi.$$

Оно следует из интерпретации этого интеграла как площади проекции единичной полусферы с полюсом N на экваториальную плоскость.

3.1 Полярное отображение

Обозначим через G_S пространство прямых на проективной плоскости S_2. Каждую прямую $g \in G_S$ (т.е. большую полуокружность) полярное отображение посылает в ее полюс ω. Поскольку полярное отображение взаимно-однозначно, мера $d\omega$ индуцирует на G_S некоторую меру dg; последняя наследует свойство инвариантности относительно группы вращений S_2. Пусть на S_2 имеется лунка L раствора α. При отображении обратном полярному лунке L соответствует множество прямых $[\nu] \subset G_S$, которые пересекают некоторую иглу $\nu \subset S_2$ (иглой мы называем всякий отрезок прямой $g \in G_S$). В данном случае концами ν являются полюса больших кругов, ограничивающих L; геодезическая длина ν оказывается равной α. Имеем

$$\int_{[\nu]} dg = \int_L d\omega = 2\alpha.$$

Словами: *на проективной плоскости инвариантная мера множества прямых, пересекающих данную иглу, всегда равна удвоенной длине иглы.*

Ниже нам потребуется решение следующей **задачи:** на S_2 имеется лунка L раствора α. На G_S определим две функци: $\theta_L(g)$ – геодезическая длина хорды $g \cap L$ и η – угол между полюсом прямой $g \in G_S$ и вершииной лунки L. Требуется вычислить интеграл

$$F(\alpha) = \int_{G_S} \theta_L(g) \cos\eta \, dg.$$

Решение. Пусть имеются две лунки L_1 и L_2, чьи внутренности не пересекаются, а объединение снова дает лунку, скажем L_3. Пусть растворы этих лунок суть α_1, α_2,α_3 соответственно. Тогда

$$F(\alpha_1) + F(\alpha_2) = F(\alpha_3).$$

Из этого уравнения и непрерывности функции $F(\alpha)$ следует, что $F(\alpha)$ пропорционально α, т.е., $F(\alpha) = C\alpha$. Константу C можно определить взяв L с раствором равным π, когда тождественно $\theta_L(g) = \pi$. После сокращения на π получаем

$$C = \int_{G_S} \cos\eta \; dg.$$

Этот интеграл равен плошади проекции полусферы S_2 на плоскость экватора, т.е. π. Итак, для лунки L раствора α всегда

$$\int_{G_S} \theta_L(g) \, \cos\eta \, dg \; = \; \pi\,\alpha.$$

Отметим, что тем же способом легко получить значение интеграла

$$\int_{G_S} \theta_L(g) \, dg = \; 2\pi\,\alpha.$$

Это частный случай общего утверждения, имеющего место на проективной плоскости: для геодезически выпуклых областей на S_2 интеграл длины хорды по инвариантной мере на G_S равен π раз площади области. Выше было доказано аналогичное утверждение для Евклидовой плоскости.

4 Плоскости в трехмерном евклидовом пространстве

Пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$ будем обозначать через $\mathbb{E}$. Плоскость $e \in \mathbb{E}$ параметризуем координатами (p, ω), $p \geq 0$, $\omega \in S_2$, где

p – расстояние от начала координат до плоскости e,

ω – пространственное направление перпендикуляра, опущенного на e из начала координат.

Другими словами, $(p\,,\omega)$ есть сферические координаты основания перпендикуляра, опущенного на плоскость e из начала координат O.

В пространстве $\mathbb{E}$ имеется мера μ, инвариантная относительно группы евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^3$. Эта мера единственна (с точностью до постоянного множителя), и в координатах (p, ω) имеет вид

$$de = dp \, d\omega. \tag{4.1}$$

Имеются также координаты x, ω, где

x – абсцисса точки пересечения плоскости e с координатной осью OX, и

ω – пространственное направление нормали к e.

Через ξ обозначим угол между ω и осью OX. Инвариантная мера на $\mathbb{E}$ записывается как

$$de = \cos\xi \; dx \; d\omega. \tag{4.2}$$

Имеются также координаты g, ψ, где

g – прямая пересечения плоскости e с координатной плоскостью XY, и

ψ – угол между нормалью к e и осью OZ.

В этих координатах имеем

$$de = \sin^2\psi \; dg \; d\psi. \tag{4.3}$$

Каждая плоскость $e \in \mathbb{E}$ разбивает $\mathbb{R}^3$ на два полупространства. *Ориентированной плоскостью* называется пара $(e, +)$, где $+$ обозначает одно из ограниченных e полупространств. Через $\overline{\mathbb{E}}$ обозначаем пространство всех ориентированных плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Стандартными координатами для $e \in \overline{\mathbb{E}}$ служат те же координаты (p, ω) или x, ψ, однако область их изменения оказывается шире. Ось значений p всегда перпендикулярна к e и направлена в положительное полупространство, $-\infty < p < \infty$; ω есть пространственное направление оси p, причем $\omega \in S_2$.

Для интегралов по $\overline{\mathbb{E}}$ и $\mathbb{E}$ действует принцип удвоения интеграла аналогичный изложенному выше для $\overline{G}$ и G.

5 Примеры интегрирования в $\mathbb{E}$

Пусть a – прямолинейный отрезок в $\mathbb{R}^3$ длины $|a|$. Найдем значение меры μ на множестве

$$[a] = \{e \in \mathbb{E} : e \text{ пересекает отрезок } a\}.$$

Поскольку площадь проекции полусферы на экваториальную плоскость равна π, находим

$$\mu([a]) = \int_{\mathbb{E}} I_{[a]}(e)\, de = \int I_{[a]} \cos\xi \; dx d\omega = \pi|a|. \tag{5.1}$$

Пусть $\mathcal{L}$ – ломаная конечной длины L в пространстве, a_i – ее звенья (прямолинейные отрезки длины $|a_i|$) . Для каждого $|a_i|$ запишем (5.1). Суммируя по всем звеньям $\mathcal{L}$, получим

$$\int_{\mathbb{E}} N(e)\, de = \pi L,$$

где $N(e)$ – число пересечений плоскости e с ломаной $\mathcal{L}$. Этот результат буквально переносится на случай, когда $\mathcal{L}$ – произвольная кривая конечной длины $|L|$. В частности, если $\mathcal{L}$ ограничивает плоскую выпуклую область D, то $L = H(D)$ – периметр области D. Интегрированием (4.3) получаем

$$\int_{D\cap e\neq\emptyset} de = \frac{\pi}{2} H(D).$$

Пусть дано ограниченое выпуклое тело $B \subset \mathbb{R}^3$. В пространстве ориентированных плоскостей рассмотрим интеграл

$$\int_{\overline{\mathbb{E}}} S(e)\, de,$$

где $S(e)$ – площадь $e \cap B$. В координатах (p, ω) имеем

$$\int_{\overline{\mathbb{E}}} S(e)\, de = \int_{S_2} d\omega \int_{p_1}^{p_2} S(e)\, dp,$$

где p_1, p_2 – значения p, отвечающие двум опорным плоскостям перпендикулярным направлению ω. Для каждого ω , $S(e)\, dp$ есть элемент объема, высекаемого из B двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными направлению ω и лежащими на расстоянии dp друг от друга.

Поэтому для каждого ω внутренний интеграл равен объему $V(B)$. Площадь поверхности сферы равна 4π. Следовательно,

$$\int_{\overline{\mathbb{E}}} S(e)\, de = 4\pi V(B).$$

Версия этого равенства для $\mathbb{E}$ имеет вид

$$\int_{\mathbb{E}} S(e)\, de \,=\, 2\pi V(B).$$

Задача. Предположим, что B – выпуклый многогранник, $[B]$ – множество плоскостей пересекающих B. Требуется найти

$$\mu([B]) = \int_{[B]} de.$$

Решение. Для каждой плоскости $e \in \mathbb{E}$ запишем тождество для индикаторной функции $I_{[B]}$:

$$2\pi\, I_{[B]}(e) = \sum_{a_i} \alpha_i\, I_{[a_i]}(e), \quad I_{[a]}(e) = \begin{cases} 1 & \text{если } e \in [a], \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где суммирование ведется по всем ребрам a_i многогранника, α_i –внешний угол многоугольника $B \cap e$ при его вершине, соответствующей ребру a_i.

Интегрируем последнее тождество по мере de. Получаем

$$2\pi \int_{\mathbb{E}} I_{[D]}(e)de = \sum_{a_i} \int_{\mathbb{E}} \alpha_i I_{[a_i]}(e)de$$

Таким образом, вычисление $\mu(B)$ сводится к вычислению интеграла

$$F(W) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{[a]} \theta \; de,$$

где угол θ равен раствору угла, высекаемого *клином* W на плоскости e. Требуется дать определение клина.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана игла (отрезок прямой) a. Всякая пара несовпадающих плоскостей (e_1, e_2), каждая из которых содержит a, разбивает R^3 на четыре области. Две из них назовем взаимно вертикальными, если их границы пересекаются только по прямой, содержащей a. *Клином* называется пара $W = (a, v)$, где v – объединение двух взаимно вертикальных областей, ограниченных плоскостями (e_1, e_2). Таким образом, данной игле a и паре (e_1, e_2) соответствуют два клина.

Интеграл $F(W)$ вычислим в координатах x, ω:

$$F(W) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_a dx \int_{S_2} \theta \, \cos\eta \, d\omega = \frac{|a|}{2\pi} \int_{S_2} \theta \, \cos\eta \, d\omega,$$

где η – угол между ω и направлвением иглы a. Выберем центр сферы направлений на игле a. На S_2 рассмотрим лунку L, ограниченную большими полукругами соответствующими e_1 и e_2, так что вершина L совпадет с направлением иглы a. Обозначим через $g \subset S_2$ полуэкватор полюса ω. Легко видеть, что $\theta = \theta_L(g)$ есть геодезическая длина хорды $g \cap L$. Как былп показано выше,

$$\int_{S_2} \theta \, \cos\eta \, d\omega \;=\; \pi \, \alpha, \text{ где } \alpha \text{ – раствор лунки } L.$$

Для заданного клина $W = (a, v)$ через $|v| = \alpha$ обозначим раствор двугранника v. Мы получим

$$F(W) \;= \frac{1}{2}|a| \, |v|.$$

В этих обозначениях

$$\mu([B]) = \sum_{W_i} F(W_i),$$

где суммирование проводится по так называемым внешним клиньям W_i многогранника B, построенным на его ребрах a_i.

Приведем без вывода формулу Г. Минковского, дающую значение $\mu([B])$ в случае, когда B представляет собой выпуклое тело с достаточно гладкой границей ∂B. Обозначим через r_1, r_2 главные радиусы кривизны ∂B (функции, зависящие от точки $P \in \partial B$). Имеет место взаимно-однозначное (гауссово) отображение

$$\partial B \mapsto \overline{S}_2$$

где каждой $P \in \partial B$ соответствует ω – направление внешней нормали к ∂B в точке $P \in \partial B$. Значение $\mu([B])$ выражается *интегралом Минковского*

$$\mu([B]) = \int_{\overline{S}_2} (r_1 + r_2)\, d\omega.$$

Вычисление $\mu([B])$ в координатах ω, p дает следуюший результат:

$$\int_{[B]} de = \int_{S_2} d\omega \int dp = \int_{S_2} b(\omega) d\omega,$$

где $b(\omega)$ – ширина тела B в направлении перпендикулярном ω. Мы получили **теорему об интеграле ширины для выпуклых тел в пространстве**:

$$\int_{S_2} b(\omega) d\omega = \int_{\overline{S}_2} (r_1 + r_2)\, d\omega.$$

В случае, когда B – многогранник, правая часть переходит в сумму $F(W_i)$ по внешним клиньям многогранника B.

6 Прямые в трехмерном пространстве

Пространство направленных прямых (прямых со стрелкой) в $\mathbb{R}^3$ будем обозначать через $\overline{\Gamma}$, а пространство прямых без стрелки – через Γ.

Прямую $\gamma \in \overline{\Gamma}$ можно параметризовать как

$$\gamma = (\omega, P_\omega),$$

где $\omega \in \overline{S_2}$ – пространственное направление прямой γ,

P_ω – точка пересечения прямой γ с плоскостью e_ω, где

e_ω – плоскость, ортогональная к γ, например содержащая начало координат.

В случае прямых $\gamma \in \Gamma$ параметризазация $\gamma = (\omega, P_\omega)$ остается в силе, однако теперь $\omega \in S_2$, где S_2 проективная плоскость.

В каждом из пространств $\overline{\Gamma}$ и Γ имеется единственная мера $d\gamma$, инвариантная относительно евклидовой группы пробразований пространства $\mathbb{R}^3$. В указанных координатах в обоих случаях она записывается как

$$d\gamma = d\omega dP_\omega,$$

где dP_ω есть лебегова мера на плоскости e_ω.

Случаи $\overline{\Gamma}$ и Γ различаются областью изменения переменной ω (S_2 и $\overline{S}_2$ соответственно).

Имеется и другая параметризация

$$\gamma = (\omega, P),$$

где по-прежнему $\omega \in \overline{S_2}$ есть направление прямой γ, а P есть точка пересечения прямой γ с какой-нибудь фиксированной плоскостью e^0. В этих координатах

$$d\gamma = \cos\theta dP\, d\omega,$$

где θ – угол между ω и направлением нормальным к плоскости e^0, dP – лебегова мера на плоскости e^0.

Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченное выпуклое тело. Обозначим через $(B) \in \overline{\Gamma}$ множество направленных прямых, пересекающих B. Каждая направленная прямая, пересекающая B, определяется своим направлением и точкой P входа в тело B.

В случае гладкой ∂B на пространстве $(B) \in \overline{\Gamma}$ имеется мера

$$d\gamma = \cos\theta dP\, d\omega,$$

где dP – элемент площади на поверхности тела B.

Эта мера на (B) совпадает с сужением на (B) инвариантной меры μ на $\overline{\Gamma}$. Найдем

$$\mu((B)) = \int_{\overline{\Gamma}} I_{(B)}(\gamma) d\gamma,$$

где $I_{(B)}(\gamma)$ есть индикаторная функция множества (B). Имеем

$$\int_{\overline{\Gamma}} I_{(B)}(\gamma) d\gamma = \int_{\partial B} dP \int_{\Omega_P} cos\ \theta(\gamma) d\omega,$$

где Ω_P – множество направлений, исходящих из точки $P \in \partial B$ и смотрящих внутрь B (в случае гладкой ∂Bдля каждой точки P это полусфера). Так как для каждой P имеем

$$\int_{\Omega_P} cos\ \theta(\gamma) d\omega = \pi,$$

получаем

$$\mu((B)) = \ \pi \ ||\partial B||,$$

где $||\partial B||$ – площадь поверхности выпуклого тела B.

Если (B) определяется как подмножество Γ, то

$$\mu((B)) = \frac{\pi}{2}\, ||\partial B||.$$

В координатах (ω, P_ω) вычисление $\mu((B))$ для $(B) \subset \Gamma$ дает следуюший результат:

$$\mu((B)) = \int_{(B)} d\gamma = \int_{A(\omega)} dP_\omega \int_{S_2} d\omega = \int_{S_2} a(\omega) d\omega,$$

где $A(\omega)$ – проекция тела B на плоскость перпендикулярную ω, а $a(\omega)$ – площадь проекции. Мы получили **теорему об интеграле площади проекции**:

$$\int_{S_2} a(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2}\, ||\partial B||.$$

7 Хорды выпуклых тел

Пусть B – ограниченное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей ∂B. *Направленной хордой* ν тела B называется его обычная прямолинейная хорда, снабженная стрелкой. Направленной хорде ν соответствует ее продолжение $\gamma \in \overline{\Gamma}$, свою стрелку γ наследует от ν. Пишем $\nu = B \cap \gamma$. Направленной хорде ν соответствует ее начало $P \in \partial B$ (точка входа прямой γ) и её пространственное направление, обозначаемое через ω.

Пространство направленных хорд для B обозначим через $\overline{[B]}$. На $\overline{[B]}$ имеется мера, индуцированная инвариантной мерой на $\overline{\Gamma}$. В координатах $\nu = (\omega, P_\omega)$ она имеет вид

$$d\nu = \cos\theta \; dP \; d\omega,$$

где θ – угол между нормалью к dP и направлением ω.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\overline{\Gamma}} \chi(\gamma) \, d\gamma,$$

где $\chi(\gamma)$ – длина хорды $\gamma \cap B$. В координатах (ω, P_ω) имеем

$$\int_{\overline{\Gamma}} \chi(\gamma) \, d\gamma \; = \; \int_{\overline{S}_2} d\omega \int_{A(\omega)} \chi(\gamma) \, dP_\omega,$$

где множество $A(\omega)$ есть проекция тела B на плоскость перпендикулярную направлению ω. Для каждого ω, произведение $\chi(\gamma)\,dP_\omega$ есть элемент объема. Поэтому для каждого ω внутренний интеграл равен объему V тела B. Следовательно,

$$\int_{\overline{\Gamma}} \chi(\gamma)\,d\gamma \;=\; 4\pi V.$$

Соответствующий интеграл по Γ в два раза меньше, т.е.

$$\int_{\Gamma} \chi(\gamma)\,d\gamma \;=\; 2\pi V.$$

Лекция 2. Геометрические неравенства и геометрические вероятности

В лекции вычисляются несколько функционалов от выпуклых областей, которые рассматривались еще В.Бляшке. Ставится вопрос об экстремальных значениях порожденных этими функционалами геометрических вероятностях. В случае тел в трехмерном пространстве, высказываются гипотезы о том, что эти вероятности принимают экстремальные значения для шара.

1 Случайные пары прямых на плоскости

Пусть D – ограниченая выпуклая область на плоскости, $[D] \subset G$ – пространство прямых, пересекающих D, H – периметр области D. Вероятностную меру на $[D]$ с элементом

$$H^{-1} I_{[D]}(g)\; dg,$$

обозначим через P (выбор коэффициента H^{-1} обеспечивает $P[D] = 1$).

В пространстве пар $[D] \times [D]$ рассмотрим вероятностную меру, определенную как произведение $P \times P$.

Задача: Чему равна вероятность события, состоящего в том, что точка пересечения Q случайной пары $(g_1, g_2) \in [D] \times [D]$ принадлежит заданной области D?

Решение. По определению, искомое значение p равно интегралу

$$p = H^{-2} \iint_{Q \in D} dg_1 dg_2,$$

(мы использовали то обстоятельство, что $Q \in D$ влечет $I_{[D]}(g_1) = I_{[D]}(g_2) = 1$). По теореме Фубини

$$p = H^{-2} \int_{[D]} dg_1 \int_{Q \in \chi} dg_2,$$

где χ – хорда $g_1 \cap D$. Ранее мы видели, что при фиксированной $g_1 \in [D]$

$$\int_{Q \in \chi} dg_2 = 2|\chi|,$$

следовательно,

$$p = 2H^{-2} \int_{[D]} |\chi| \, dg_1 = 2\pi \frac{||D||}{H^2}.$$

Напомним, что $||D||$ – площадь области D. Поскольку $p \leq 1$, отсюда следует

$$2\pi ||D|| \leq H^2.$$

Классическое изопериметрическое неравенство имеет вид

$$4\pi ||D|| \leq H^2,$$

откуда следует, что

$$\frac{||D||}{H^2} \leq \frac{1}{4\pi}.$$

Итак, получается результат

$$p \leq \frac{1}{2},$$

причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда D есть круг (следует из известного свойства изопеимерического неравенства).

Замечание. Тот же результат можно получить, исходя из тождества

$$dg_1 dg_2 = \sin|\phi_1 - \phi_2| dQ d\phi_1 d\phi_2,$$

где

dQ – мера Лебега на плоскости,

$d\phi_i$ – равномерная мера в пространстве направлений на плоскости (мера, инвариантная относительно вращений), т.е. на интервале $(0, \pi)$, $i = 1, 2$.

Действительно,

$$\iint_{Q \in D} \sin|\phi_1 - \phi_2| dQ d\phi_1 d\phi_2 = 2\pi ||D||,$$

и наше выражение для p находим делением на H^2.

2 Случайные пары плоскостей

Пусть B – ограниченая выпуклая область в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, $[B] \subset E$ – пространство плоскостей, пересекающих B. Вероятностную меру на $[B]$ с элементом

$$M^{-1} I_{[B]}(e)\ de,$$

обозначим через P_1. Здесь M – интеграл Минковского, то есть,

$$M = \int I_{[B]}(e) de.$$

Выбор коэффициента M^{-1} обеспечивает $P_1[D] = 1$.

В произведении пространств $[B] \times [B] \subset E \times E$ рассмотрим вероятностную меру, определенную как произведение $P_1 \times P_1$.

Задача: Внутри $[B] \times [B]$ выбирается случайная пара независимых плоскостей (e_1, e_2). Чему равна вероятность p_1 события, состоящего в том, что случайная прямая $\gamma = e_1 \cap e_2$ пересекает тело B?

Решение. Обозначим через (B) множество прямых, пересекающих область B. Поскольку $\gamma \in (B)$ влечет $I_{[B]}(e_1) = I_{[B]}(e_2) = 1$, искомая вероятность p_1 равна интегралу

$$p = M^{-2} \iint_{\gamma \in (B)} de_1 de_2.$$

В пространстве пар e_1, e_2, для которых определена прямая $\gamma = e_1 \cap e_2$, рассмотрим координаты

$$\gamma, \varphi_1, \varphi_2,$$

где φ_i есть угол поворота плоскости e_i вокруг оси γ, здесь $i = 1, 2$.

Имеем равенство мер:

$$de_1 de_2 = \sin|\varphi_1 - \varphi_2| d\gamma d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Мы видели, что

$$\int_{\gamma \in (B)} d\gamma = \frac{\pi}{2} S,$$

где S – площадь поверхности тела B. Далее

$$\int \sin|\varphi_1 - \varphi_2| d\varphi_1 d\varphi_2 = 2\pi.$$

Следовательно,

$$p = \frac{\pi^2 S}{M^2}.$$

Тот же результат можно получить и другим способом. По теореме Фубини

$$p = M^{-2} \int_{[B]} de_1 \int_{\gamma \cap B \neq \emptyset} de_2.$$

Ранее мы видели, что при фиксированной $e_1 \in [B]$

$$\int_{\gamma \in (B)} de_2 = \pi |e_1 \cap B| = \frac{\pi}{2} H(e_1),$$

где $H(e_1)$ есть периметр области $e_1 \cap B$, высекаемой телом B на плоскости e_1. Так приходим к уже полученному выражению для p.

В случае, когда B есть шар единичного радиуса

$$p = \frac{4\pi^3}{(4\pi)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Гипотеза. Для любого ограниченого выпуклого тела B справедливо неравенство

$$p \leq \frac{\pi}{4},$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда B есть шар. Эквивалентная формулировка: имеет место неравенство

$$\pi S \leq \frac{M^2}{4}$$

3 Случайные пары "прямая - плоскость"

Пусть по-прежнему B – ограниченая выпуклая область в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, M – интеграл Минковского для B, S – площадь поверхности тела B. Пусть также $[B] \subset E$ – пространство плоскостей пересекающих B, $(B) \subset \Gamma$ – пространство прямых, пересекающих B.

В пространстве пар (γ, e), где $\gamma \in (B)$ и $e \in [B]$, рассмотрим вероятностную меру P_2 с элементом

$$(M \cdot \pi S)^{-1} \ I_{(B) \times [B]}(\gamma, e) \, d\gamma de.$$

Задача: Для каждой пары (γ, e) обозначим через Q точку пересечения γ и e. Найти вероятность

$$p = P_2\{Q \in B\}$$

того, что случайная точка Q окажется внутри тела B.

Решение. По определению, искомая вероятностть p равна интегралу

$$p = (M \cdot \pi S)^{-1} \iint\limits_{Q \in B} d\gamma \, de.$$

(Использовано то обстоятельство, что $Q \in B$ влечет $I_{(B)}(\gamma) = I_{[B]}(e) = 1$.) По теореме Фубини

$$p = (M \cdot \pi S)^{-1} \int_{(B)} d\gamma \int_{Q \in B} de.$$

Мы видели, что

$$\int_{Q \in B} de = \pi |\chi|,$$

где χ – хорда $\gamma \cap B$. Следовательно,

$$p = (MS)^{-1} \int_{(B)} |\chi| d\gamma.$$

В свою очередь,

$$\int_{(B)} |\chi| d\gamma = 2\pi V,$$

где V – объем тела B. Итак,

$$p_2 = 2\pi (MS)^{-1} V \leq 1,$$

откуда

$$MS \leq 2\pi V.$$

В частном случае, когда B есть шар единичного радиуса, имеем $M = 4\pi$, $S = 4\pi$, $V = \frac{4\pi}{3}$, т.е.

$$p = \frac{1}{6}$$

Гипотеза. Значение $1/6$ есть максимальное значение вероятности p, т.е. справедливо неравенство

$$p \leq \frac{1}{6}$$

или, что то же самое,

$$2\pi V \leq \frac{MS}{6}.$$

4 Случайные тройки плоскостей

Пусть, как и ранее, B – ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^3$,

$[B] \subset E$ – пространство плоскостей, пересекающих B,

$[B]^3 \subset E \times E \times E$ – пространство троек плоскостей, каждая из которых пересекает B.

На пространстве $[B]^3$ рассмотрим вероятностную меру P

$$M^{-3} I_{[B]^3}(e_1, e_2, e_3)\, de_1 de_2 de_3,$$

где

$$M = \int_{[B]} de.$$

Задача: Для тройки (e_1, e_2, e_3) обозначим через Q точку пересечения этих трех плоскостей. Найти вероятность

$$p = P\{Q \in B\}$$

того, что случайная точка Q окажется внутри тела B.
Решение. По определению, искомая вероятностть p равна интегралу

$$p = M^{-3} \iiint\limits_{Q \in B} de_1\, de_2\, de_3,$$

В пространстве троек (e_1, e_2, e_3), для которых определена точка Q, воспользуемся координатами

$$Q, \omega_1, \omega_2, \omega_3,$$

где ω_i – направление, нормальное к плоскости e_i, i=1,2,3. Имеет место

$$de_1 de_2 de_3 = dQ d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3,$$

где dQ – мера Лебега в $\mathbb{R}^3$, а каждая $d\omega_i$ – равномерная мера на полусфере. Получаем

$$p = \frac{V}{M^3} \iiint\limits_{Q \in B} d\omega_1\, d\omega_2\, d\omega_3 = (2\pi)^3 \frac{V}{M^3}.$$

В частном случае, когда B есть шар единичного радиуса, имеем $M = 4\pi$, $V = \frac{4\pi}{3}$, т.е.

$$p = (2\pi)^3 \frac{4\pi}{3} \frac{1}{(4\pi)^3} = \frac{\pi}{6}.$$

Гипотеза. Значение $\frac{\pi}{6}$ есть максимальное значение вероятности p, т.е. справедливо неравенство

$$p \leq \frac{\pi}{6}.$$

5 Хорды выпуклых областей

5.1 Двумерный случай

Пусть задана ограниченная выпуклая область D в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. Пусть $[D] \subset G$ – множество прямых пересекающих D. На $[D]$ рассмотрим вероятностную меру P с элементом

$$|D|^{-1} I_{[D]}(g)\ dg.$$

Рассмотрим случайную величину

$$\chi(g) = \text{длина хорды } D \cap g,$$

и через $F(x)$ обозначим ее функцию распределения, т.е.,

$$F(x) = P(\chi(g) \leq x)$$

Математическое ожидание $E\chi$ случайной величины χ равно

$$E\chi = \int x\, dF(x) = \frac{\pi ||D||}{|D|}.$$

В.Бляшке поставил задачу вычисления величин (моментов) $E\chi^n$. Повторим его вычисление для $n = 3$.

Пары точек (Q_1, Q_2) на плоскости $\mathbb{R}^2$ параметризуем так:

$$(Q_1, Q_2) = (g, t_1, t_2),$$

где $g \in G$ есть прямая, содержащая обе точки Q_1, Q_2, а t_1, t_2 – координаты точек Q_1, Q_2 на g.

Пусть dQ – лебегова мера на $\mathbb{R}^2$. Для произведения $dQ_1 dQ_2$ лебеговых мер имеет место

$$dQ_1 dQ_2 = \rho\, dg\ dt_1\ dt_2,$$

где ρ есть расстояние между точками Q_1, Q_2.

Для квадрата площади области D имеем:

$$S^2 = \iint\limits_{D\times D} dQ_1 dQ_2 = \int\limits_{[D]} dg \iint\limits_{t_1, t_2 \in \chi(g)} \rho\, dt_1\, dt_2.$$

Далее,

$$\iint\limits_{t_1, t_2 \in \chi(g)} \rho\, dt_1\, dt_2 = 2\int_0^{\chi} dt_1 \int_{t_1}^{\chi} (t_2 - t_1)\, dt_2 = 2\int_0^{\chi} \left[\frac{\chi^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} - t_1(\chi - t_1)\right] dt_1 =$$

$$2\int_0^{\chi}\left[\frac{\chi^2}{2}+\frac{t_1^2}{2}-t_1\chi\right]\,dt_1=\int_0^{\chi}[\chi-t_1]^2\,dt_1=\frac{\chi^3}{3}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{[D]}\chi^3(g)\,dg\;=\;3S^2$$

и

$$E\chi^3=\frac{3S^2}{|D|}.$$

5.2 Трехмерный случай

Пусть B – ограниченое выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$, $(B)\subset\Gamma$ – множество прямых, пересекающих B. На (B) рассмотрим вероятностную меру

$$(\pi S)^{-1}I_{[B]}(\gamma)\;d\gamma,$$

и определим случайную величину

$$X(\gamma)\;=\;\text{длина хорды}\;\;B\cap\gamma.$$

Её математическое ожидание равно

$$EX=\frac{1}{\pi S}\int X(\gamma)\,d\gamma=\frac{2V}{S},$$

где V – объем тела B, S – его поверхность. Следуя В.Бляшке, вычислим четвертый момент EX^4. Для этого параметризуем пары точек (Q_1,Q_2) в пространстве $\mathbb{R}^3$ так:

$$(Q_1,Q_2)=(\gamma,t_1,t_2),$$

где $\gamma\in\Gamma$ есть прямая, содержащая точки Q_1,Q_2, а числа t_1,t_2 – одномерные координаты точек Q_1,Q_2 на γ.

Имеет место равенство мер

$$dQ_1dQ_2=\rho^2\,d\gamma\;dt_1\;dt_2,$$

где ρ есть расстояние между точками Q_1,Q_2. Имеем

$$V^2\;=\iint\limits_{D\times D}dQ_1dQ_2=\int\limits_{[D]}d\gamma\iint\limits_{t_1,t_2\in X(\gamma)}\rho\,dt_1\,dt_2.$$

Далее,

$$\iint\limits_{t_1,t_2\in X(\gamma)} \rho^2\, dt_1\, dt_2 = 2\int_0^X dt_1 \int_{t_1}^X (t_2-t_1)^2\, dt_2 = 2\int_0^X dt_1 \int_0^{X-t_1} u^2\, du =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^X (X-t_1)^3\, dt_1 = \frac{X^4}{6}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{[D]} X^4(\gamma)\, d\gamma \;=\; 6V^2,$$

то есть,

$$EX^4 = \frac{6V^2}{\pi S}.$$

5.3 Тождество Бляшке

Это тождество – инструмент вычисления интегралов в пространстве Г. Рассмотрим пространство пар

$$(\gamma, e_\gamma) = (\gamma, \phi_\gamma),$$

где $\gamma \in \Gamma$, и

e_γ = плоскость, содержащая прямую γ,

ϕ_γ = угол поворота вокруг γ плоскости e_γ.

Пусть $d_\gamma\phi$ есть обычная угловая мера в пространстве поворотов вокруг γ, $d_e g$ есть инвариантная мера в пространстве прямых, принадлежащих плоскости e. Имеет место совпадение мер (тождество Бляшке):

$$d\gamma\; d_\gamma\phi = de\; d_e g, \tag{5.1}$$

Следовательно, для любой функции $f(\gamma)$, определенной на Г имеем

$$\int f(\gamma) d\gamma\; d_\gamma\phi = \int f(\gamma)\; de\; d_e g.$$

При каждой фиксированной γ имеем

$$\int d_\gamma\phi = \pi.$$

Применяя теорему Фубини, получаем желаемое тождество

$$\int f(\gamma) d\gamma = \frac{1}{\pi}\int\; de\; \int f(\gamma)\; d_e g.$$

В качестве примера рассмотрим $f(\gamma) = I_{(B)}(\gamma)$, где B – выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$, $||\partial B||$ – площадь его поверхности, через $(B) \subset \Gamma$ обозначено множество прямых, пересекающих B. Для фиксированной плоскости e, пересекающей B, имеем

$$\int I_{(B)}(g)\, d_e g = H(e), \quad e \in [B],$$

где $H(e)$– периметр плоской выпуклой области $e \cap B$.

Поскольку работаем с ненаправленными прямыми, интегрируя по de, получаем

$$||\partial B|| = \frac{2}{\pi^2} \int_{[B]} H(e)\, de.$$

Величина $M^{-1} \int_{[B]} H(e) de$ представляет собой математическое ожидание EH периметра области, возникающей при пересечении B случайной плоскостью. Делением на M получаем

$$EH = \frac{2M}{\pi^2 \cdot ||\partial B||}.$$

Лекция 3. Бюффоновы множества в пространстве прямых на плоскости. Четвёртая проблема Гильберта

В лекции описывается класс так называемых бюффоновых подмножеств пространства прямых на плоскости и выводится комбинаторное разложение для значений мер таких множеств. Это комбинаторное разложение имеет непосредственное отношение к четвертой проблеме Гильберта для плоскости.

1 Мера бюффоновых множеств

1.1 Бюффоновы кольца и Бюффоновы множества

Скоплением мы называем всякое конечное множество точек

$$\{P_i\}_1^n = \{P_1, ..., P_n\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Обозначим через $[P]$ пучок прямых из $\overline{G}$, проходящих через точку P. Для каждой $g \in \overline{G}$, через g^* обозначим полуплоскость, лежащую справа от g.

Каждой прямой $g \in \overline{G}$, не принадлежащей ни одному из пучков $[P_i]$, ставим в соответствие $Z = g^* \bigcap \{P_i\}_1^n$ (множество точек заданного скопления попавшее в g^*). Пусть прямой $g_1 \in \overline{G}$ соответствует Z_1, а прямой $g_2 \in \overline{G}_2$ соответствует Z_2. Прямые g_1 и g_2 назовем эквивалентными, если $Z_1 = Z_2$. Каждой прямой $g \in \overline{G}$, не проходящей через точки скопления, соответствует класс эквивалентности $\Upsilon(g) \subset \overline{G}$

$$\Upsilon(g) - \text{ множество всех прямых из } \overline{G}, \text{ эквивалентных данной } g \in \overline{G}.$$

Множество $\Upsilon(g) \subset \overline{G}$ всегда является связным открытым множеством; замыкание $\Upsilon(g)$ не будет компактным, если для (каждой) $g \in \Upsilon$ все скопление $\{P_i\}_1^n$ целиком лежит либо в g^*, либо в его дополнении.

Все остальные классы $\Upsilon(g)$ имеют компактное замыкание: их мы называем *атомами.* Обозначим через $\overline{Br}\{P_i\}_1^n$ минимальное кольцо подмножеств $\overline{G}$, содержащее все атомы.

Всякий элемент $B \in \overline{Br}\{P_i\}_1^n$ есть открытое множество в $\overline{G}$, оно имеет вид $B = \bigcup a_i$, где a_i - какие-то атомы из $\overline{Br}\{P_i\}_1^n$. Кольца $\overline{Br}\{P_i\}_1^n$ называются *Бюффоновыми кольцами.* Множество в $B \in \overline{G}$ называется Бюффоновым, если существует скопление $\{P_i\}_1^n \subset \mathbb{R}^2$ такое, что внутренность B принадлежит $\overline{Br}\{P_i\}_1^n$.

1.2 Разложение меры бюффоновых множеств для невырожденных плоских скоплений, случай инвариантной меры на пространстве $\overline{G}$

В 1890 английский математик Дж.Сильвестр рассмотрел следующее прямое обобщение задачи Бюффона. Пусть на плоскости зафиксированы n игл $\nu_1,...,\nu_n$ в общем положении. Сильвестр показал, что значения инвариантной меры на подмножествах G вида

$$B = \bigcap_{i=1}^{n}[\nu_i] \quad \text{или} \quad B = \bigcup_{i=1}^{n}[\nu_i]$$

допускают представление

$$\mu(B) = \sum_{i<j} c_{ij}(B)\,|P_i, P_j|, \tag{1.1}$$

где сумма распространяется на все пары концов игл $\nu_1,...,\nu_n$, а $c_{ij}(B)$ - целочисленные коэффициенты. Сильвестр поставил вопрос об алгоритме вычисления коэффициентов $c_{ij}(B)$ (так называемая *задача Бюффона–Сильвестра*).

В формулировке теоремы ниже, дающей ответ на эту задачу, участвуют коэффициенты $c_{ij}(B)$, зависящие от выбора скопления $\{P_i\}_1^n$, от Бюффонова множества $B \in \overline{Br}\{P_i\}_1^n$ и от неупорядоченной пары точек $\{P_i, P_j\} \subset \{P_i\}_1^n$. Дадим определение величин $c_{ij}(B)$ для случая, когда в скоплении $\{P_i\}_1^n$ никакие три точки не лежат на одной прямой.

Как мы видели, всякая прямая $g \in \overline{G}$, не содержащая точек из $\{P_i\}_1^n$ определяет свое множество $Z \subset \{P_i\}_1^n$. То же Z соответствует любой прямой из Υ – класса эквивалентности для g.

Если $Z \neq \{P_i\}_1^n$ и $Z \neq \emptyset$, то Υ представляет собой атом.

Пусть (P_i, P_j) – упорядоченная пара точек из скопления $\{P_i\}_1^n$, g_{ij} – направленная прямая, проходящая через P_i и P_j, от P_i к P_j, $Z_{i,j}$ – подмножество скопления, лежащее в открытой полуплоскости g_{ij}^* (т.е. P_i и P_j в $Z_{i,j}$ не входят). Поскольку в $\{P_i\}_1^n$ никакие три точки не лежат на одной прямой, то классов эквивалентности, куда может попасть прямая $g_{i,j}$ в результате малых шевелений последней, всего четыре. Из каждого класса эквивалентности выберем по одной (произвольной) прямой:

$$g_{ij}(++) \text{ оставляет справа от себя обе точки } P_i \text{ и } P_j;$$

$$g_{ij}(+-) \text{ оставляет справа от себя точку } P_i \text{ и слева точку } P_j;$$

$$g_{ij}(-+) \text{ оставляет справа от себя точку } P_j \text{ и слева точку } P_i;$$

$$g_{ij}(--) \text{ оставляет слева от себя обе точки } P_i \text{ и } P_j.$$

Пусть задано бюффоново множество $B \in \overline{Br}\{P_i\}_1^n$. Обозначим $I_B(i^+, j^-) = I_B(g_{ij}(+-))$, $I_B(i^+, j^+) = I_B(g_{ij}(++))$, и так далее (всего четыре величины). В этих обозначениях коэффициенты $c_{ij}(B)$ записываются так:

$$c_{ij}(B) = I_B(i^+, j^-) + I_B(i^-, j^+) - I_B(i^+, j^+) - I_B(i^-, j^-). \tag{1.2}$$

Это выражение назовем *формулой четырех индикаторов.*

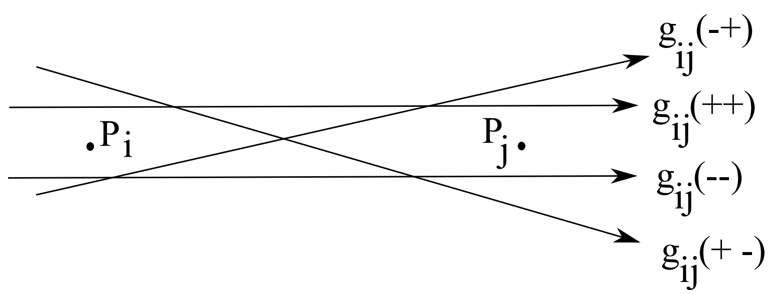


Рис. 1: Четыре способа шевеления прямой g_{ij}

Теорема 1.1 *(решение обобщенной задачи Бюффона-Сильвестра) Пусть в скоплении $\{P_i\}_1^n$ отсустврют коллинеарные тройки точек. Тогда для любого бюффонова множества $B \in \overline{Br}\{P_i\}_1^n$ имеет место разложение:*

$$\mu(B) = \sum_{(i,j)} c_{ij}(B)\,|P_i, P_j|. \tag{1.3}$$

Здесь μ – инвариантная мера в пространстве $\overline{G}$, коэффициенты $c_{ij}(B)$ задаются формулой четырех индикаторов (1.2), $|P_i, P_j|$ – расстояние между точками P_i и P_j, суммирование проводится по упорядоченным парам (P_i, P_j) точек из скопления.

Для пространства G имеем следствие (доказательство применением операции стирания стрелки):

Теорема 1.2 *Пусть в скоплении $\{P_i\}_1^n$ отсуствуют коллинеарные тройки точек. Тогда для любого множества $A \in Br\{P_i\}_1^n$ имеет место разложение:*

$$\mu(A) = \sum_{i<j} c_{ij}(A)\,|P_i, P_j|. \tag{1.4}$$

Здесь μ – инвариантная мера в пространстве G, коэффициенты $c_{ij}(B)$ задаются формулой четырех индикаторов (1.2), $|P_i, P_j|$ – расстояние между точками P_i и P_j, суммирование проводится по двухточечным множествам P_i, P_j.

Ниже будет доказана более общая теорема, где μ будет обозначать произвольную беспучковую меру, а величина $|P_i, P_j|$ заменяется на меру множества прямых, пересекающих иглу P_i, P_j.

2 Примеры

2.1 Порядковые периметры плоских скоплений

Пусть задано некоторое скопление $\{P_i\}_{i=1}^n$, в котором никакие три точки не лежат на одной прямой.

Для $k = 1, 2, ..., n-1$ определим подмножества $\overline{G}$:

$$B_k = \{g \in \overline{G} : \text{ справа от } g\text{, то есть, в } g^*\text{, находится ровно } k \text{ точек скопления}\}.$$

Для вычисления значений $\mu(B_k)$ применим формула (1.3):

Пусть g_{ij} – прямая, проходящая через точки P_i и P_j, направленная от P_i к P_j. Обозначим через m число точек скопления, лежащих справа от g_{ij}. Тогда

$$I_{B_k}(i^-, j^+) = I_{B_k}(i^+, j^-) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = k-1; \\ 0, & \text{иначе .} \end{cases}$$

$$I_{B_k}(i^+, j^+) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = k; \\ 0, & \text{иначе .} \end{cases}$$

$$I_{B_k}(i^-, j^-) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = k-2; \\ 0, & \text{иначе .} \end{cases}$$

Получаем:

$$c_{ij}(B_k) = \begin{cases} -1, & \text{если } m = k \text{ или } m = k-2; \\ 2, & \text{если } m = k-1; \\ 0, & \text{если } m \text{ принимает любые другие значения.} \end{cases}$$

Подстановка в (1.3) дает

$$\mu(B_k) = -f_k + 2f_{k-1} - f_{k-2}, \;\; k = 1, 2, ..., n-1.$$

Числа f_k получили название *порядковых периметров* скопления $\{P_i\}_{i=1}^n$.

2.2 Прямые, пересекающие иглу

Пусть скопление состоит из двух точек, P_1 и P_2. Тогда кольцо $Br\{P_i\}_1^2$ состоит из двух элементов: $\emptyset$ (пустое множество) и $A \subset G$, где

$$A = \text{множество прямых, пересекающих иглу } P_1, P_2.$$

Вычислим значение инвариантной меры μ множества A. Легко видеть, что

$$I_A(1^-, 2^+) = 1, \quad I_A(1^+, 2^-) = 1, \quad I_A(1^+, 2^+) = 0, \quad I_A(1^-, 2^-) = 0.$$

Получаем уже известное значение

$$\mu([P_1, P_2]) = 2\,|P_1, P_2|.$$

где, как обычно, $|P_1, P_2|$ есть расстояние между точками P_1 и P_2.

2.3 Неравенство треугольника

На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим треугольник с вершинами $\{P_1, P_2, P_3\} = \{P_i\}_1^3$. Положим

$$B = \{g \in G : g \text{ отделяет } P_1 \text{ от двух других вершин}\}.$$

Имеем $B \in Br\{P_i\}_1^3$. Положительное направление на стороне P_1, P_2 выберем от P_1 к P_2, и пусть P_3 лежит справа от P_1, P_2. Тогда

$$I_B(1^+, 2^-) = 0, \quad I_B(1^-, 2^+) = 1, \quad I_B(1^-, 2^-) = I_B(1^+, 2^+) = 0,$$

т.е.

$$c_{12}(B) = 1.$$

Это значение от выбора направления не зависит. По симметрии,

$$c_{13}(B) = 1.$$

Аналогично находим

$$c_{23}(B) \;=\; -1.$$

Таким образом, (1.3) принимает вид

$$\mu(B) = |P_1, P_2| + |P_1, P_3| - |P_2, P_3|.$$

Положительность меры влечет *неравенство треугольника*:

$$|P_1, P_2| + |P_1, P_3| - |P_2, P_3| > 0.$$

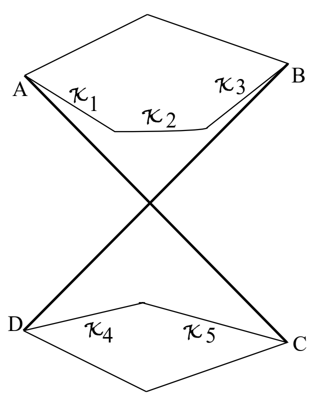


Рис. 2: Диагонали Крофтона: $d_1 = AC$, $d_2 = BD$. Стороны Крофтона обозначены через κ_i

.

2.4 Теорема Крофтона

Пусть C_1 и C_2 – два непересекающихся выпуклых многоугольника, $\{P_i\}_1^n$ – совокупность их вершин. Предположим, что никакие три точки из $\{P_i\}_1^n$ не лежат на одной прямой. Применим (1.3) для вычисления значения инвариантной меры μ множества $\alpha \in Br\{P_i\}_1^n$ прямых, отделяющих C_1 от C_2. (α является атомом кольца $Br\{P_i\}_1^n$).

Коэффициенты $c_{ij}(\alpha)$ оказываются отличными от нуля исключительно для игл $P_i, P_j = d_1$, $P_i, P_j = d_2$ (*диагонали Крофтона*), а также для игл $P_i, P_j = \nu_k$ (*стороны Крофтона*), они указаны на рис. 2. При этом

$$c_{d_1}(\alpha) = c_{d_2}(\alpha) = 1, \quad \text{и для каждой } \nu_k \;\; c_{\nu_k}(\alpha) = \;-1.$$

Получаем *теорему Крофтона*:

$$\mu(\alpha) \;=\; |d_1| + |d_2| \;-\; \sum_k |\nu_k|,$$

где суммирование проводится по всем сторонам Крофтона (принадлежащим как C_1, так и C_2).

2.5 Решение задачи Бюффона - Сильвестра

Применим формулу четырех индикаторов для вычисления коэффициентов $c_{ij}(B)$ в задаче Бюффона-Сильвестра, см. Введение. Пусть $\{P_i\}_1^{2n}$ – множество концов заданных игл ν_1,....,ν_n; пусть в этом скоплении никакие три точки не лежат на одной прямой.

Полагаем

$$B = \bigcap [\nu_i] \in Br\{P_i\}_1^{2n}.$$

Применение (1.3) даёт

$$\mu(B) \;=\; \sum_{(*)} 2\, I_{(n-1)}(\nu_i)\,|\nu_i| \;+\; \sum_{(**)} [I_d(P_i,P_j) \;-\; I_s(P_i,P_j)]\, I_{(n-2)}(P_i,P_j)\,|P_i,P_j|. \qquad (2.1)$$

Здесь

(*) – первоначально заданные иглы $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$,

(**) – класс пар $\{P_i, P_j\}$, где точки в каждой паре являются концами разных игл из числа $\nu_1, ...\nu_n$;

$I_{(n-1)}(\nu_i) \;=\; 1$, если прямая, содержащая иглу ν_i, пересекает все остальные $n-1$ иглы из совокупности $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$, в противном случае $I_{(n-1)}(\nu_i) = 0$;

$I_{(n-2)}(P_i, P_j) = 1$ если прямая, содержащая точки P_i, P_j, пересекает ровно $n-2$ игл из совокупности $(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ (не считая двух игл с концами в точках P_i, P_j), в противном случае $I_{(k)}(P_i, P_j) = 0$;

$I_d(P_i, P_j) = 1$, если иглы с концами P_i и P_j лежат в разных полуплоскостях относительно прямой P_1, P_j, в противном случае $I_d(P_i, P_j) = 0$;

$I_s(P_i, P_j) \;=\; 1$, если иглы с концами P_i и P_j лежат в одной полуплоскости относительно прямой P_i, P_j, в противном случае $I_s(P_i, P_j) = 0$.

3 Комбинаторное разложение общих мер и четвертая проблема Гильберта

3.1 Разложение мер бюффоновых множеств из G, случай произвольной беспучковой меры

Мера m на G называется *беспучковой относительно скопления* $\{P_i\}_1^n$, если $m[P_i] = 0$ для всякой точки $P_i \in \{P_i\}_1^n$.

Мера m на G называется *беспучковой*, если $m[P_i] = 0$ для всякой точки $P_i \in \mathbb{R}^2$.

Теорема 3.1 *Пусть в скоплении $\{P_i\}_1^n$ отсуствуют коллинеарные тройки точек. Тогда для любой беспучковой относительно данного скопления меры m и любого бюффонова множества $B \in Br\{P_i\}_1^n$ имеет место разложение:*

$$2m(B) \, = \sum_{(i,j)} c_{ij}(B) \, m([P_i, P_j]). \tag{3.1}$$

Здесь коэффициенты $c_{ij}(B)$ задаются формулой четырех индикаторов, $m([P_i, P_j])$ – мера множества прямых, разделяющих точки P_i и P_j, суммирование проводится по неупорядоченным парам (P_i, P_j) точек из скопления.

Доказательство. Отметим вначале, что коэффициенты c_{ij} аддитивны относительно объединения произвольных бюффоновых множеств B_1 и B_2, то есть, всегда верно

$$c_{ij}(B_1) + c_{ij}(B_2) = c_{ij}(B_1 \cup B_2) - c_{ij}(B_1 \cap B_2).$$

Поскольку каждое бюффоново множество есть объединение непересекающихся атомов, достаточно убедиться в справедливости теоремы для каждого из них.

Покажем, что для атомов утверждение теоремы сводится к обобщению формулы Крофтона, а именно:

Пусть C_1 и C_2 – две выпуклых многоугольных области, замыкания которых не пересекаются, $\{P_i\}_1^n$ – совокупность вершин этих двух многоугольников. Предположим, что никакие три точки из $\{P_i\}_1^n$ не лежат на одной прямой.

Множество прямых α, разделяющих C_1 и C_2, есть атом кольца $Br\{P_i\}_1^n$. Его мера может быть вычислена по формуле Крофтона

$$2m(\alpha) \, = \, m([d_1]) + m([d_2]) \, - \, \sum_k m([\nu_k]),$$

где d_1 и d_2 – диагонали Крофтона, а суммирование проводится по всем сторонам Крофтона (принадлежащим как C_1, так и C_2), см. рис. 2.

Напомним, что δ-мерой в пространстве G, сосредоточенной на элементе $g \in G$, называется мера m такая, что

$$m(A) = \begin{cases} 1, & l \in A; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

δ-мера, сосредоточенная на элементе $g \in G$, является беспучковой относительно $\{P_i\}_1^n$ тогда и только тогда, когда прямая g не содержит точек скопления.

Чтобы доказать справедливость формулы Крофтона для $m(\alpha)$, достаточно показать её справедливость для всех δ-мер, беспучковых относительно $\{P_i\}_1^n$. Пусть m есть δ-мера, сосредоточенная на прямой g. Рассмотрим случаи:

1. Прямая g пересекает обе диагонали Крофтона, но не пересекает ни одной из сторон Крофтона. Тогда $2m(\alpha) = 2$, а правая часть дает вклад $m([d_1]) + m([d_2]) = 1 + 1$, то есть, тождество выполнено.

2. Прямая g пересекает обе диагонали Крофтона, и две из сторон Крофтона, скажем, с номерами i и j. Тогда $2m(\alpha) = 0$, а правая часть дает вклад $m([d_1]) + m([d_2]) - m([\nu_i]) - m([\nu_j]) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$, то есть, тождество выполнено.

3. Прямая g пересекает одну из диагоналей Крофтона и одну из сторон Крофтона. Аналогично убеждаемся, что $2m(\alpha) = 0$, а правая часть дает вклад $1 - 1 = 0$, то есть, тождество выполнено.

Все возможные случаи проверены, теорема доказана.

3.2 Плоские метрики. Четвертая проблема Гильберта

Функция $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *метрикой*, если

1. d симметрична: $d(x, y) = d(y, x)$.

2. d неотрицательна: $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, y) = 0$ равносильно $x = y$.

3. Выполнено неравенство треугольника:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\ x, y, z.$$

Мы рассматриваем метрики, непрерывные по обоим аргументам.

Непрерывная метрика определяет длину кусочно-гладкой кривой, а следовательно, и кратчайшие пути, соединяющих две данные точки.

Метрика называется *плоской*, если кратчайшими путями всегда оказываются (евклидовы) прямые, и только они.

Лемма 3.1 *Непрерывная метрика d плоская тогда и только тогда, когда для любой коллинеарной тройки точек x, y, z, лежащих на прямой именно в этом порядке, неравенство треугольника превращается в равенство:*

$$d(x,y) + d(y,z) = d(x,z).$$

Заметим, что всякая беспучковая мера m на G задает непрерывную метрику на плоскости:

$$d_m(x,y) = m([x,y]).$$

Действительно, неотрицательность, симметричность и непрерывность d_m очевидны, а неравенство треугольника вытекает из неотрицательности меры прямых, отделяющих точку z от точек x и y.

Верно и обратное:

Теорема 3.2 *(решение четвертой проблемы Гильберта для плоскости)*

Всякая полная плоская метрика d порождена некоторой беспучковой мерой m.

Перечислим основные шаги доказательства. Пусть фиксирована непрерывная плоская метрика d; конструктивно опишем соответствующую меру m.

На бюффоновых множествах зададим функционал:

$$\mathcal{M}(B) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} c_{ij}(B)\, d(P_i, P_j). \tag{3.2}$$

Этот функционал конечно-аддитивен, так как конечно-аддитивны коэффициенты c_{ij}. Кроме того,

Лемма 3.2 *Функционал $\mathcal{M}$ принимает лишь неотрицательные значения.*

Достаточно доказать лемму для атомов. Для этого воспользуемся формулой Крофтона и применим индукцию по числу ребер Крофтона. База индукции следует непосредственно из неравенства треугольника для метрики d.

Индукционный переход. Пусть C_1 и C_2 – два непересекающихся выпуклых многоугольника, $\{P_i\}_1^n$ – совокупность их вершин, α – множество прямых, отделяющих C_1 от C_2.

Возьмем два ребра Крофтона из C_1, между которыми лежит ровно одно ребро Крофтона и продлим их до пересечения (см. рис. 3). Добавим получившуюся точку P в имеющееся скопление.

Легко показать, что точка P не попадает в многоугольник C_2 (доказательство этого факта мы оставляем читателю). Тогда α равно объединению множества прямых, отделяющих C_1 от $C_1 \cup P$ и множества прямых, отделяющих P от P_1P_2.

По предположению индукции, значения функционала на этих множествах неотрицательны. Осталось воспользоваться аддитивностью $\mathcal{M}$.

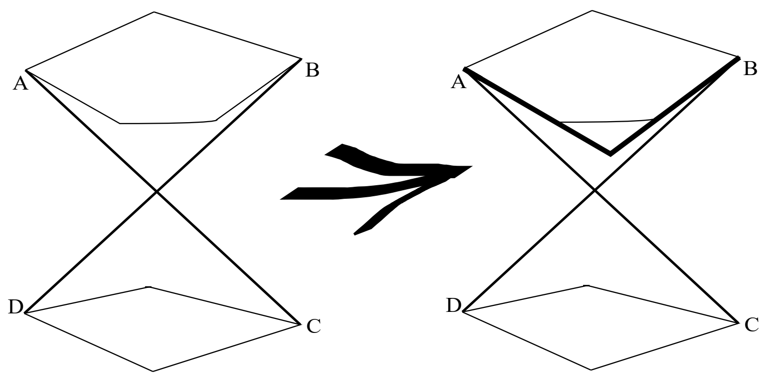


Рис. 3: Шаг индукции

Стандартными методами теории меры функционал $\mathcal{M}$ продолжается до меры, живущей на пространстве G (подробности мы опускаем). Теорема доказана.